Maria Montessori

Psicogeometria

Maria Montessori

Dattiloscritto inedito
a cura di Benedetto Scoppola

Introduzione

Il pensiero matematico montessoriano, che nasce con la pubblicazione di Il Metodo della Pedagogia Scientifica applicato all'educazione infantile- nelle Case dei Bambini *del 1909, trova il suo compimento in due opere molto posteriori,* Psicoaritmetica *e* Psicogeometria*, entrambe pubblicate a Barcellona, in lingua spagnola, nel 1934, in un momento storico difficile. La Montessori non ha avuto la possibilità di rivederne le bozze. Avviene dunque che* Psicogeometria*, opera ricchissima e sulla quale la Montessori aveva investito molte energie, vede la luce in una versione editoriale approssimativa.*

Diversamente da quello che accadrà per Psicoaritmetica*, successivamente ripubblicata in diverse lingue, l'edizione spagnola di* Psicogeometria *del 1934, quasi introvabile, rimane l'unica testimonianza dello sforzo della Montessori riguardo all'insegnamento della geometria.*

Dopo più di settanta anni la Association Montessori Internationale e la Montessori Pearson Estate, che ringrazio, hanno deciso di ripubblicare Psicogeometria *e mi hanno messo a disposizione diversi testi, tra cui l'ultima versione dattiloscritta, in lingua italiana, da cui è stata tratta la traduzione spagnola poi pubblicata da Araluce. Lo studio di questa sorta di prima versione italiana è dunque di grande aiuto nella ricostruzione del pensiero originale dell'autrice. L'Opera Nazionale Montessori ha immediatamente sostenuto il progetto di ripubblicare in lingua italiana il testo di* Psicogeometria*, contemporaneamente all'edizione inglese curata dall'AMI, e ha fatto in modo che nella ricostruzione del testo originale la tradizione dell'insegnamento montessoriano, che l'Opera stessa ha tanto efficacemente preservato, giocasse un ruolo fondamentale. È doveroso ricordare in questo senso il prof. Augusto Scocchera, che quando ancora il progetto di ripubblicazione di* Psicogeometria *sembrava di difficile attuazione mi ha spinto ad approfondire i miei studi riguardo alla matematica montessoriana.*

In questa introduzione sarà ricostruita, per quanto possibile, la vicenda editoriale del testo di Psicogeometria*, saranno brevemente introdotti i temi dell'opera e verrà descritto il lavoro editoriale che è stato necessario compiere per questa pubblicazione.*

1. La vicenda editoriale

Gli elementi che abbiamo per comprendere la sfortunata vicenda editoriale di Psicogeometria *non sono moltissimi, ma permettono di ricostruire un quadro abbastanza preciso. L'opera vede la luce dopo un lungo lavoro di sperimentazione di attività di tipo geometrico, già in parte introdotte in altri libri, e dopo molti anni di insegnamento di argomenti geometrici nei corsi internazionali tenuti dall'autrice stessa. Abbiamo qualche nota dattiloscritta di queste lezioni, in parte datate e risalenti agli anni '20-'30. Il testo definitivo di* Psicogeometria *viene poi ottenuto a partire da note manoscritte della Montessori. Questo materiale manoscritto non ci è pervenuto. Sembra (v. in proposito la biografia della Kramer) che la Montessori abbandonò Barcellona, nel 1936, in modo piuttosto precipitoso, ed è verosimile che molti dei suoi appunti siano rimasti in Spagna. Le note manoscritte originali sono state dattiloscritte in lingua italiana. Il testo non è datato, ma contiene numerose annotazioni a mano in lingua italiana e spagnola, e dunque deve risalire ai primi anni '30. Nel dattiloscritto mancano alcune pagine, alcune figure e un intero capitolo, quello riguardante il calcolo delle aree delle figure geometriche.*

Appare evidente anche a una prima lettura che, mentre la struttura dell'opera era già molto chiara nella mente della Montessori nel momento in cui le sue note furono dattiloscritte, l'opera poi tradotta e pubblicata da Araluce era un collage di diversi appunti e di diverse versioni, che aveva bisogno di un accurato lavoro editoriale prima di essere stampato. Questo si evince per esempio dal fatto che nel testo si trovano (a volte anche a brevissima distanza l'una dall'altra) numerose ripetizioni, e soprattutto dall'inserimento, alla fine di alcuni capitoli, di liste dei nuovi argomenti introdotti, non coerenti con il testo precedente.

Parte del lavoro editoriale necessario alla pubblicazione del testo dattiloscritto è stato affidato a curatori italiani e traduttori spagnoli, che sono stati certamente più di uno. Tracce di interventi successivi si trovano soprattutto nella numerazione delle figure: il dattiloscritto, infatti, ha le pagine numerate per quanto riguarda il testo, ma molte figure appaiono in pagine non numerate; si vede che la numerazione di queste figure ha subito vari rimaneggiamenti e che la numerazione definitiva che appare nel dattiloscritto è sbagliata. Nell'edizione a stampa ricompare la prima numerazione del dattiloscritto, che è quella corretta, poi cancellata a mano da un curatore. È chiaro, dunque, che diverse mani sono intervenute sul dattiloscritto, senza avere la possibilità di consultare la Montessori (di fatto sul dattiloscritto appare, tra innumerevoli annotazioni di altre mani, *un'unica correzione di pugno dell'autrice). In quegli anni, peraltro, i biografi registrano una attività editoriale e di promozione delle sue idee che non deve aver lasciato alla Montessori molto tempo libero.*

Nonostante il fatto che un secondo curatore ha evitato errori grossolani di impaginazione, il risultato finale di questo lavoro editoriale dei traduttori spagnoli è piuttosto modesto: il dattiloscritto italiano originale è pieno di refusi e di interpretazioni fantasiose della scrittura elegante ma non sempre chiara della Dottoressa; dove il traduttore non capiva, tendeva a omettere intere frasi. In questo modo il senso di alcuni periodi del testo originale viene alle volte profondamente modificato. Le figure, che ovviamente in un testo come questo hanno un'importanza fondamentale, furono riprodotte riportando fedelmente, e a volte peggiorando, gli errori dovuti al fatto che la figura del dattiloscritto era semplicemente un schizzo, spesso eseguito a mano libera.

Perfino la suddivisione in capitoli e paragrafi, che manca quasi completamente nel dattiloscritto, non aiuta a comprendere la struttura generale dell'opera. Era dunque evidente (anche alla Montessori) che l'opera meritava senz'altro di essere ripubblicata.

Abbiamo infatti un secondo voluminoso dattiloscritto, curato da Mario Montessori e datato 1954. Questo dattiloscritto contiene alcune aggiunte al testo, a volte molto interessanti, e introduce alcuni materiali che sono attualmente prodotti dalle ditte specializzate ma non sono descritti in nessuna opera pubblicata della Montessori. Ma il lavoro editoriale relativo al testo originale è molto deludente: il testo italiano è una ritraduzione dallo spagnolo dell'edizione Araluce. Mario Montessori evidentemente non ricordava di possedere, nella sua stessa biblioteca, il dattiloscritto degli appunti originali della Dottoressa. Gli errori di interpretazione e le omissioni del curatore spagnolo sono quindi fedelmente riprodotti. L'apparato iconografico non è presente nel dattiloscritto del 1954 e dunque non sappiamo quanto Mario Montessori fosse cosciente della necessità di rivederlo profondamente. Infine si vede come una grande preoccupazione nel lavoro di Mario fosse quella di correggere un "errore", probabilmente segnalato da qualche matematico dell'epoca, che evidentemente aveva molto turbato lui e, forse, anche la Montessori: nella parte finale dell'opera, infatti, vi è un breve paragrafo che si intitola "la quadratura del cerchio". Il titolo non è felice: è ben noto che non è possibile costruire la quadratura del cerchio con riga e compasso. Nel testo è presentata una quadratura approssimata, costruita con riga e compasso, che potrebbe avere un senso didattico, anche se forse andrebbe presentata in modo leggermente diverso. Certamente questo paragrafo costituisce uno dei pro-

blemi minori nella ricostruzione dell'opera. È probabile invece che la sua presenza sia stata uno dei motivi principali della mancata ripubblicazione di Psicogeometria.

Nello studio presente il dattiloscritto del '54 non è preso in considerazione, in quanto non aggiunge nulla al testo della Montessori. I brani originali di Mario Montessori sono ovviamente molto interessanti, ma sono appunto di un altro autore e meritano una pubblicazione indipendente; va detto, comunque, che questi brani sono molto simili a quelli poi successivamente pubblicati in vari articoli su "Association Montessori Internationale Communications" (vedi per esempio l'articolo sui triangoli costruttori del n. 1, 1969, pag. 12). L'interesse principale del dattiloscritto del '54, nel contesto di questo studio, sta nel fatto che era chiaro alla Montessori e al figlio che Psicogeometria andava ripubblicato curandone meglio l'edizione e che, per qualche motivo che non conosciamo completamente, la ripubblicazione non è stata allora possibile.

2. I temi

Il testo della Montessori è estremamente ricco e una sua ricostruzione critico-pedagogica completa richiederà molto studio e probabilmente un'adeguata discussione da parte degli specialisti. Più importante ancora sarà una lunga sperimentazione nelle scuole e la discussione della pratica concreta delle attività presentate nel libro che renderanno quest'ultimo un'opera viva, e non una ricostruzione puramente accademica del pensiaro di una singola autrice, seppure importante come Maria Montessori. È però possibile individuare alcuni temi prevalenti che sono a volte presentati in modo molto esplicito dall'autrice e a volte invece costituiscono una specie di tacito e sottile "fil rouge" dell'opera.

Il primo è un tema ricorrente nell'opera montessoriana, ed è quello dei cosiddetti "periodi sensitivi". È interessante notare innanzitutto che il tema è completamente assente in Psicoaritmetica*. Questo fa pensare che la Montessori intendeva le due opere come un tutt'uno (come anche scrive nella introduzione di* Psicoaritmetica*) e che la sfortunata vicenda che si è tentato di ricostruire ha impedito una diffusione organica del pensiero montessoriano riguardo alla matematica. È anche notevole il fatto che i periodi sensitivi siano presentati in* Psicogeometria *con specifici riferimenti alla geometria stessa: la Montessori dunque intendeva sottolineare come un insegnamento precoce (nel senso della didattica tradizionale)* *della geometria, in genere considerata un tema difficile e adatto a una età più adulta, fosse non solo auspicabile, ma anche più rispettoso dello sviluppo del bambino.*

Un secondo tema presentato molto esplicitamente è quello della "scoperta" come motore della proposta didattica. La geometria, rappresentata opportunamente da materiali in cui le relazioni tra le varie parti delle figure sono presenti in modo esatto, è una disciplina che si presta alla scoperta autonoma delle relazioni stesse. In questo senso sembra di poter dire che Psicogeometria *è forse più importante di* Psicoaritmetica*, in cui i materiali, peraltro bellissimi e numerosi, sono finalizzati soprattutto allo studio delle convenzioni relative al nostro sistema di numerazione. Quando una relazione è "scoperta", come spesso succede in* Psicogeometria*, il successivo approfondimento, attraverso lo studio, il ragionamento e l'introduzione di un vocabolario appropriato, diventa uno sviluppo naturale della scoperta stessa, e dunque viene perseguito quasi senza fatica.*

Un altro tema estremamente interessante ma più implicito, che anticipa di circa vent'anni la discussione pedagogica successiva, è quello della conservazione. Nelle primissime pagine del testo si parla in termini molto semplici e allo stesso tempo molto efficaci della scoperta da parte dei bambini delle proprietà di invarianza per rotazione discreta dei poligoni. Leggendo questo breve brano nell'ottica della discussione posteriore è evidente come la Montessori avesse chiaro il fatto che la scoperta di proprietà di invarianza, o di conservazione, fosse uno dei motori fondamentali dello sviluppo del bambino, ma in più come avesse scelto le proprietà di conservazione "giuste" per l'età dei bambini stessi. È ben noto che Piaget, vent'anni dopo, mostrò in modo molto convincente che alcune proprietà di conservazione che sono assolutamente naturali per l'adulto, sono incomprensibili a livello percettivo per il bambino. In particolare la nozione insiemistica di numero (per quanto riguarda i numeri naturali, l'unica presa in considerazione da Piaget) si fonda sulla conservazione delle quantità. Piaget mostra, con esperimenti i cui risultati sono perfettamente ripetibili, che un insieme in cui gli elementi vengono allargati di fronte al bambino viene percepito come più numeroso dello stesso insieme nella configurazione di partenza. Questo è senz'altro interessante. Ma è forse ancor più interessante trovare gli ambiti in cui altre proprietà di conservazione o di invarianza possono essere scoperte anche da bambini molto piccoli, in quanto è l'idea di invarianza, più che la sua particolare realizzazione, quella che aiuta lo sviluppo psicologico razionale del bambino.

Molto più implicita, ma altrettanto interessante, è la costruzione della ge-

ometria nel senso delle esperienze materiali. Il testo della Montessori, come lei stessa sottolinea, non è un manuale di geometria classica. Come la geometria classica, però, la geometria materiale montessoriana si sviluppa su un principio fondamentale, si potrebbe dire quasi un'assioma, che è la base di costruzioni a volte anche assai complesse. L'assioma è il seguente: se due figure possono essere costruite una a partire dall'altra mediante scomposizioni e successive ricomposizioni di materiale, allora quelle due figure hanno la stessa area (lo stesso "valore" nel linguaggio montessoriano). Questo principio ovviamente non ha nulla a che spartire con gli assiomi legati alle costruzioni con riga e compasso della geometria euclidea, in quanto si riferisce a una costruzione della geometria diversa, più "materiale". Né la presentazione è strettamente consequenziale, come negli Elementi*. Tuttavia l'idea di far "percepire" relazioni profonde per "preparare" la mente allo studio sistematico della disciplina è molto affascinante, ed è realizzata nel testo con grande rigore logico.*

In questo senso è notevole, in Psicogeometria *come in* Psicoaritmetica*, il legame strettissimo che la Montessori sottolinea in continuazione tra le due discipline. Basti pensare che in* Psicoaritmetica *vengono presentati in modo geometrico tutti i teoremi dell'algebra geometrica di Euclide, quelli che in senso algebrico sono noti come prodotti notevoli, mentre in* Psicogeometria *uno studio molto approfondito delle frazioni e delle proporzioni è presentato partendo da scomposizioni di figure geometriche fondamentali. La Montessori sembra dunque dire che è importante risalire alle origini della scienza, agli* Elementi *appunto, per trovare i metodi pedagogici più fecondi nell'insegnamento della matematica.*

3. Il lavoro editoriale

Nel presentare questo dattiloscritto sostanzialmente inedito sono stati rispettati alcuni criteri piuttosto rigorosi, in modo da permettere agli studiosi una ricostruzione completa, inconsistenze editoriali comprese, del testo.

Per quanto possibile il testo originale è stato rispettato, sia per il vocabolario, sia per la punteggiatura. In particolare la Montessori ha un uso della punteggiatura decisamente inusuale, almeno per il lettore di oggi. Il traduttore spagnolo ha preferito una costruzione della frase in cui la punteggiatura è notevolmente semplificata rispetto al dattiloscritto montessoriano. Tuttavia questa punteggiatura, che va pensata come un segno di penna nei punti in cui un discorso parlato prende fiato, è parte integrante *del testo e in questa edizione è stata rispettata scrupolosamente. Invece quasi sempre si è sostituito ai numerosi virgolettati il carattere corsivo, come probabilmente indicato dalla stessa autrice ai curatori dell'edizione spagnola.*

Refusi evidenti del dattilografo (come per esempio doppie vocali o doppie consonanti sbagliate, inversioni di lettere, maiuscole o minuscole sbagliate), che sono numerosi nel testo, sono stati semplicemente corretti senza riportarli in nota. Refusi che possono dare adito a ricostruzioni più o meno incerte sono stati invece segnalati dettagliatamente. Va quindi tenuto presente, in questi casi, che il testo riportato è una ricostruzione, ovviamente opinabile. Attraverso le note, comunque, è sempre possibile recuperare il testo così come è stato dattiloscritto. Le poche ricostruzioni che comportano testi aggiunti anche dal traduttore spagnolo sono riportate in nota.

L'organizzazione del testo in capitoli e paragrafi è assai approssimativa nel dattiloscritto. Il traduttore spagnolo ha compiuto in questo senso un lavoro piuttosto importante. Non sappiamo se ci siano state indicazioni precise dell'autrice.

Qui è riportata la divisione in capitoli e paragrafi dell'edizione spagnola (e del successivo dattiloscritto curato da Mario Montessori). All'inizio di ogni capitolo è stata inserita una breve introduzione, che illustra i temi trattati e mette in evidenza elementi di particolare importanza (eventuali incongruenze, elementi utili da tenere presente nella discussione pedagogica, ecc.)

La ricostruzione dell'apparato iconografico dell'opera, che è stata portata a termine con il prezioso aiuto di Annamaria Bianconi, è stata la parte del lavoro editoriale più problematica, nel senso che ha richiesto più delle altre un lavoro di interpretazione delle intenzioni dell'autrice. L'osservazione fondamentale che ha permesso di risolvere molte inconsistenze editoriali dell'edizione spagnola è stata la seguente: molte delle ripetizioni, a volte davvero incredibili, che si incontrano nel testo non sono altro che indicazioni per gli insegnanti sul modo concreto in cui il quaderno di geometria che ogni bambino dovrebbe "ampliare a poco a poco" deve essere costruito. Queste ripetizioni testuali, dunque, vanno interpretate nel senso di essere esse stesse parte di una illustrazione.Tracce di questa indicazione si trovano anche nei commenti manoscritti a margine del dattiloscritto originale, riportati in nota. In molti altri casi si è ricostruito l'apparato iconografico con una certa libertà, cercando di renderlo il più possibile coerente con il testo.

Questa osservazione, che non è stata compresa fin dalla prima stesura dattiloscritta dell'opera, getta una luce nuova sulla stesura di Psicogeo-

metria. *Come scrive Camillo Grazzini nella prefazione di* Psicoaritmetica *del 1971, i due libri della Montessori riguardanti l'insegnamento della matematica non ebbero la risonanza che meritavano in quanto "la classe magistrale [...] voleva semplicemente una guida didattica immediatamente operativa, come si direbbe oggi".*
Ebbene, la ricostruzione qui proposta di Psicogeometria *vorrebbe dimostrare come la classe magistrale non trovò quello che cercava anche a causa di una infelicissima vicenda editoriale, superata la quale si potrà meglio riprendere lo spirito di concreta guida nelle classi che era tipico del lavoro della Montessori.*
Questo lavoro di ricostruzione è stato possibile grazie alla collaborazione preziosa di molte persone. Il testo è stato rivisto da Kay Baker, che ha ricontrollato anche la correttezza della parte matematica. Le illustrazioni sono state realizzate grazie alla grande competenza (e pazienza!) di Miep Van de Manakker. Le foto sono state realizzate da Guido Caltabiano. Per l'edizione italiana la prima impaginazione, preziosa per migliorare l'accordo tra testo e illustrazioni, è stata realizzata da Elena Dompè, mentre l'impaginazione definitiva e parte delle illustrazioni sono state realizzate da Francesca Romana Capone che ha curato anche l'editing complessivo del testo. Un ringraziamento particolare va a Paola Trabalzini, che mi ha messo a disposizione molto materiale della Biblioteca dell'Opera, e in particolare un dattiloscritto del fondo Gobbi che si è rivelato praticamente identico al dattiloscritto originale e che ha permesso la ricostruzione fedele di alcune parti originali che sono andate perdute. Nel ringraziare le maestre Anna Ceccacci e Laura Mayer, che mi hanno mostrato materiali appartenenti alla scuola di via Lemonia di Roma, è doveroso ricordare la figura di Flaminia Guidi, che più di altri ha mantenuto vivo l'insegnamento montessoriano della geometria.
Un grande ringraziamento va all'Opera Nazionale Montessori, che pubblica questa opera. Tre presidenti si sono avvicendati durante il lungo lavoro di ricostruzione editoriale di queste pagine: Pietro De Santis, Giovanni Trainito e Luciano Mozzetti. Ringrazio loro e tutta l'Opera Montessori per la collaborazione.
Un ringraziamento va anche a Franco Ghione e al Centro di Ricerca e formazione permanente per l'insegnamento delle discipline scientifiche dell'Universita' di Roma "Tor Vergata". Grazie anche a Emanuele Conte e Giuseppe Tognon.

B.S.
Roma, settembre 2010

1. Generalità[1]

Il primo capitolo di Psicogeometria*, intitolato "Generalità" o "Linee introduttive" nel dattiloscritto del 1954 (anche se vi è il dubbio che il titolo "Generalità" sia solo, nelle intenzioni dell'autrice, il titolo del paragrafo iniziale) pur essendo rivolto alle prime, più elementari attività riguardo alla geometria, è uno dei più ricchi e interessanti.*
È anche il più lungo, per quanto riguarda la parte strettamente testuale, costituendo da solo quasi un terzo di tutta l'opera.
Nell'introduzione iniziale e nel successivo paragrafo sui periodi sensitivi l'autrice comunica in modo breve ma estremamente efficace i principi del suo insegnamento. Sorprende che una discussione pedagogica così intensa sia in qualche senso "relegata" a un testo sull'insegnamento della geometria. Questo può voler dire che la Montessori teneva molto a questo argomento, oppure che la sua abilità nel comunicare i suoi principi educativi si era mano mano raffinata (l'autrice era sessantaquattrenne all'epoca della pubblicazione di Psicogeometria*), o forse tutte e due le cose.*
Successivamente la Montessori presenta i materiali geometrici pre-elementari già introdotti in Il Metodo della Pedagogia Scientifica applicato all'educazione infantile nelle Case dei Bambini*, ma la discussione è molto diversa da quella presentata nell'opera del 1909. Qui gli aspetti geometrici del materiale sono molto valorizzati, e questioni profonde, come l'invarianza per rotazione delle figure e la proporzionalità delle figure simili, sono introdotte brevemente ma in modo estremamente efficace. L'attenzione specifica agli aspetti geometrici del materiale (che nasce come materiale puramente sensoriale) è stata in parte vanificata, nell'edizione spagnola, da alcuni dettagli della traduzione.*
In questa parte del testo vengono inoltre presentati alcuni materiali che non sono mai stati realizzati dalle ditte specializzate.
Dopo una notevole presentazione dell'idea del disegno decorativo geometrico, il resto del capitolo è dedicato alla descrizione di un vocabolario minimo per iniziare un lavoro sulla geometria, e ai metodi con cui questo

[1] Nelle primissime pagine la parola "generalità" è riportata in alto in ogni pagina, e poi viene sostituita da "La geometria nella Casa dei bambini". Questi "running titles", che avrebbero aiutato a ricostruire l'organizzazione dell'indice come la Montessori lo pensava, dopo poche pagine scompaiono.

vocabolario minimo può essere presentato. Questa parte del capitolo è molto interessante perché introduce le prime costruzioni con riga e compasso (e squadra, in realtà, cosa che rende le costruzioni non propriamente euclidee ma certamente più semplici) e perché mostra come sia possibile risolvere uno dei problemi principali dell'insegnamento della geometria, che è quello del vocabolario, utilizzando la tendenza spontanea dei bambini a classificare (in qualche senso a "collezionare") gli oggetti. Questa tendenza naturale, ovviamente, deve essere utilizzata nel momento giusto.

Da un'altro punto di vista, però, questa parte pone alcuni problemi editoriali, per vari motivi.

Innanzitutto vi sono nel testo numerose ripetizioni, a volte veramente incomprensibili. In questa riedizione del testo le ripetizioni sono state interpretate come una indicazione dettagliata della costruzione delle pagine del quaderno di geometria. Il testo iniziale, insomma, rappresenterebbe la spiegazione data dall'insegnante, mentre la ripetizione, spesso accompagnata da illustrazioni leggermente diverse, rappresenterebbe l'illustrazione di come le spiegazioni dell'insegnante devono essere realizzate nel quaderno di geometria di ciascun bambino. Questa interpretazione è molto convincente, in varie parti del testo, e viene realizzata nel seguito inserendo il testo in carattere calligrafico dentro l'illustrazione, in modo da rendere l'idea del quaderno realizzato dal bambino.

Un altro problema del testo è che non tutte le definizioni proposte dalla Montessori sono quelle che si utilizzano normalmente. Particolarmente notevole in questo senso è la definizione di mediana in un triangolo, che è ben diversa dalla mediana che si intende in tutti i testi di geometria. Nella ricostruzione del pensiero originale dell'autrice, in questo caso, ci viene in aiuto il testo in inglese di un breve discorso che la Montessori tenne probabilmente subito prima della pubblicazione di Psicoaritmetica *e* Psicogeometria. *In questo discorso la parola mediana è utilizzata per indicare la mediana in senso tradizionale. È dunque probabile che nei vari passaggi, tra curatori del testo italiano e spagnolo, il testo originale sia stato corrotto.*

Si sono dunque, in questo ed in altri casi, utilizzate le definizioni classiche, riportando in nota il testo originale. Queste piccole modifiche del testo sembrano peraltro essere conformi al pensiero della Montessori stessa, che nella Conferenza n. 45 tenuta durante il corso di Roma, il 9 giugno del 1931, scrive: "Quello che occorre sapere è il poco che bisogna dare, il quale però, necessariamente, deve essere dato in modo assolutamente *esatto, specialmente quando c'è qualche cosa di convenzionale stabilito".*[2] *Infine notiamo come la lista di oggetti geometrici che conclude il capitolo mostri come il testo che ci è pervenuto è senza dubbio un'opera di collage di varie versioni, perché alcuni degli oggetti geometrici elencati sono introdotti molti capitoli dopo.*

Generalità

I metodi di insegnamento elementare si sono finoggi preoccupati di trasmettere la conoscenza e perciò vennero rivolti direttamente alla mente del fanciullo, secondo considerazioni di ordine psicologico. La mente del fanciullo fu considerata indipendentemente da ogni precedente conoscenza che non sia venuta dalla scuola: perciò come vuota. Infatti le conoscenze empiriche che possono essere state acquistate casualmente e disordinatamente, hanno poco valore nella costruzione di una mente colta - cioè logicamente coltivata. Ciò avviene per ogni forma di coltura. È ben noto per esempio che un maestro di pianoforte troverà deplorevole che la mano del suo allievo abbia già cominciato a suonare senza guida: e il suo lavoro dovrà[3] essere innanzi tutto quello di *toglier via i difetti*. Nell'insegnare poi procederà logicamente, cominciando dalle note, ecc.
In un campo tutto diverso, come quello della geometria o dell'aritmetica - si trova la medesima condizione. I maestri cominceranno con linee ed angoli o vero coi primi numeri. E il problema che si porranno sarà prima di tutto[4] che cosa sia più facile a comprendere, perché da qui dovrà incominciare l'insegnamento. Io ricordo le discussioni di professori eminenti in un congresso di matematica, i quali si chiedevano se sia più facile contare i numeri nella loro naturale successione (numeri cardinali) ovvero considerare i numeri secondo l'ordine e il posto che occupano reciprocamente (numeri ordinali[5]). Risolti con discussioni logiche i problemi relativi al procedimento delle conoscenze successive, restava solo insegnare: far capire prima la cosa più facile e collegare quindi il precedente al susseguente per ordine di difficoltà - passando dal noto all'ignoto.
Argomenti ulteriori riguardano in modo particolare l'insegnamento della

[2] Copyright AMI.
[3] La frase è ripresa dal testo spagnolo perché nel dattiloscritto al posto di questa frase è presente un testo parzialmente cancellato e poco comprensibile.
[4] Si è omesso l'inizio di un virgolettato (") che non viene poi chiuso nel dattiloscritto.
[5] Nel testo la Montessori ripete due volte, con parole diverse, la definizione di numero ordinale. Il senso è comunque chiaro.

geometria e dell'aritmetica. Infatti esse sono materie astratte ove la mente deve rappresentarsi in principio soltanto qualche realtà e poi procede in un campo puramente logico. Ora la realtà iniziale è in se stessa astratta e simbolica: linee, numeri. Essendo ciò difficilmente accessibile al bambino si è ricorso nelle prime classi elementari a qualche sussidio materiale, offrendo ai sensi delle *quantità in rapporto ai numeri, delle forme complete in rapporto alla geometria*. La preoccupazione dei maestri è però quella di fare ben presto passare all'astrazione la mente del bambino: perché altrimenti si perderebbe l'essenza stessa dell'insegnamento, il cui scopo è sopratutto di elevare la mente nei campi dell'astrazione.

Il cammino, dunque, si basa tutto sul giudizio del maestro. Egli giudica ciò che è facile e difficile, ciò che si deve dare e come e infine, passando (il maestro) da insegnamento fuggevolmente[6] concreto a combinazioni astratte di numeri e di segni - pensa di avere penetrato e condotto la mente del bambino.

Ma quanto spesso il maestro si illude! Solo eccezionalmente penetrò nella mente infantile: il più delle volte l'opera del maestro rimase fuori perché non riuscì a interessare il bambino. E la pretesa astrazione fu spesso la risposta forzata di una facoltà semplicemente mnemonica messa alla tortura. Le parole *difficoltà - ostacolo - ponte dell'asino - scoglio* - sono applicate ad un lamentevole insuccesso nell'insegnamento della matematica elementare che segna i gradini primissimi della coltura. L'insieme dei problemi che si presentano agli educatori non si risolvono con uno studio logico della successione delle difficoltà. Vi è una tecnica speciale nei metodi d'insegnamento. C'è tutta un'altra serie di ostacoli che oggi ancora non si prendono[7] in considerazione nella pratica. L'apprendimento, infatti, è sottomesso ad una condizione essenziale: che l'allievo *accetti* di ricevere le cognizioni: che egli possa fare attenzione e cioè si *interessi*. La sua *attività psichica* è il sine qua non per la riuscita.

Tutto ciò che dà noia, che scoraggia, che interrompe diventa un ostacolo che nessuna preparazione logica dell'insegnamento, può superare[8]. È dunque lo studio delle condizioni necessarie allo svolgimento[9] delle attività spontanee dell'individuo, è l'arte di lasciare spandere la gioia e l'entusiasmo nel lavoro che occorre prendere di mira. Il fatto *dell'interesse* che

[6] Si legge nel dattiloscritto "fu giovelmente". Il traduttore spagnolo ha sostituito con "facile e", cambiando il senso della frase.
[7] Si è omesso un secondo "ancora" presente nel dattiloscritto.
[8] "Superarlo" nel dattiloscritto.
[9] Si tenga presente qui e nel seguito che la Montessori usa spesso il verbo "svolgere" nel senso del nostro "sviluppare".

spinge ad una attività spontanea è veramente una chiave psicologica. Si può *capire* e *capire chiaramente* senza venire a nessun risultato. A questo proposito, mi viene in mente un aneddoto che sentii raccontare da bambina: un uomo chiedeva denaro ad uno straniero ricco ma avaro, che non capiva bene la sua lingua. Egli si sforzava di esporre le sue ragioni con chiarezza, sapendo che l'altro doveva avere molte difficoltà a comprenderlo. Infatti lo straniero restò muto per qualche tempo, ma infine rispose: "capire, ma non dare".

Così lo sforzo di *chiarezza* dell'uomo che chiedeva denaro, rimaneva senza risultato effettivo. Era un insuccesso malgrado che la chiarezza non avesse fatto difetto. Qualche cosa di simile avviene fra il maestro e il bambino. Tutto quanto il bambino ha *capito* resta ineffettivo e passa via. Può capire molte cose: e farsi dentro un magazzino, un caos di cose capite: senza tuttavia che sia[10] risvegliato l'Io attivo, con le sue energie costruttive di interesse e di entusiasmo. Lo *sforzo* del lavoro, dello studio, dell'apprendimento è frutto dell'interesse e nulla si acquista senza sforzo. Non voglio qui raccogliere il bisticcio che molte persone hanno sollevato a proposito dell'interesse e dello sforzo, mettendo in contraddizione queste due facce della medesima cosa: infatti molti hanno detto che bisogna scegliere in educazione tra *interesse* e *sforzo* - chiamando interesse l'esecuzione piacevole, sforzo l'esecuzione spiacevole. Ma sforzo è ciò che si compie attivamente usandovi le proprie energie: e ciò si fa quando c'è l'interesse. Ora l'uomo non è una macchina: egli agisce quando è capace di interesse, di generosità, di entusiasmo: e questo uomo vivo e attivo e perciò forte, saprà assumere sopra di sé anche lo *sforzo spiacevole*.

Chi in educazione è riuscito a suscitare un interesse che porta a scegliere un'azione e ad eseguirla con tutte le forze, con entusiasmo fattivo - ha svegliato l'uomo. Ha toccato quel *soffio* di cui parla la Bibbia, che rese uomo la forma composta col fango. Ora l'uomo *svegliato dall'interesse* dimostra spesso energie insospettate. Così il bambino, egli nello sforzo dell'interesse dispiega capacità che rimanevano latenti e sconosciute.

È questo aspetto nuovo del bambino interessato, che fa cambiare le antiche *preoccupazioni psicologiche* e apre un campo più vivo ai metodi di educazione.

Le antiche idee non erano sbagliate: ma corrispondevano a un preconcetto elaborato dall'adulto. Se si considera il bambino come fulcro dell'educazione, e se la guida sta nella *scelta fatta dal bambino*, anziché nella logica del maestro, vengono necessariamente principi del tutto nuovi nell'educazione.

[10] Si è omesso l'inizio di un virgolettato (") che non viene poi chiuso nel dattiloscritto.

Periodi sensitivi

I principi generali del mio metodo di educazione non sono a tutti ignoti e vari libri li espongono dettagliatamente. Qui però occorre accennarli, perché noi prendiamo in considerazione un fatto psicologico che non è in genere rilevato.
L'accenno conduce appunto a chiarire i fatti fondamentali dell'*interesse*. Non basta dunque *capire* per essere interessati. L'interesse ha il suo fondamento nella *personalità*.
Ora è specialmente notevole la personalità infantile, a questo proposito; perché essa nel suo sviluppo psichico passa attraverso stadi diversi - i quali hanno pure - *interessi diversi*. Basta questo per capire subito che la medesima cosa chiaramente presentata, desterà interesse in una età, ma non più in una età diversa.
Subito brilla innanzi alla nostra mente la possibilità del fatto di non riuscire a interessare con una cosa determinata un bambino di sei anni, che capisce ma resta indifferente, e perciò disattento e svogliato: e di presentare poi la stessa cosa e nello stesso modo a un bambino di quattro anni che capisce e risponde con attività.
Questo fatto sorprendente che forse fu incontrato da molti nella pratica semplice della vita famigliare non è entrato nell'ambiente della psicologia e della scuola, dove tutto fu considerato come se procedesse lungo un filo diritto: dal semplice al complesso, dal concreto all'astratto, dal noto all'ignoto, dall'imperfetto al perfetto, dal cattivo al buono.
Mentre invece esistono durante il periodo della crescenza dei centri successivi di sensibilità psichica, che poi si spengono per essere sostituiti da altri.
Un esempio a tutti noto è quello dello sviluppo del linguaggio: è in una età speciale che si fissano i suoni del linguaggio parlato, o meglio le possibilità di riprodurli. Noi cioè pronunciamo bene la nostra lingua perché la udimmo e ne potemmo fissare la riproduzione nel nostro periodo sensitivo del linguaggio. Fatti adulti non potremo mai più acquistare accenti perfetti per una lingua diversa - malgrado il nostro ingegno, la nostra applicazione e la perfetta comprensione della lingua *straniera*. Ora il bambino reagisce con entusiasmo, con interesse attivo, a tutto quanto corrisponde ai suoi periodi sensititivi. Ed è chiaro che se un *acquisto* iniziale di coltura si fissa in uno di questi periodi - esso rimane come[11] un *precedente* che apre le porte dell'intelletto al *seguito*. L'interesse infantile svegliato sopra un argomento, è una calamita interiore permanente rispetto alle successive

[11] "Con" sul dattiloscritto.

conquiste. Come appunto nell'uomo - il linguaggio fissato sensorialmente e nei meccanismi della pronuncia durante il periodo sensitivo, rimane per sempre un acquisto che va perfezionandosi insieme allo sviluppo successivo della vita mentale.
Su interessi preesistenti si costruiscono altri interessi - con essi[12] collegati logicamente. Una conoscenza sempre più vasta può organizzarsi su un primitivo nucleo, a mano a mano che ha luogo lo sviluppo mentale. Ed è evidente che se nella personalità esistono attitudini speciali, *sensibilità personali* (e non più solo periodi sensitivi) tutto lo svolgimento si incunea attorno a questa sensibilità - generando ciò che noi chiamiamo: *una vocazione*.
Ora noi diremo *sensoriale* tutto quanto si riferisce ai sensi esterni, per distinguere e riservare la parola *sensitiva* alla attitudine interiore relativa agli sviluppi successivi della vita e in genere alla personalità, al *centro*.
L'attività interiore è il capolavoro della natura creatrice - e noi non possiamo intervenire direttamente in esso. Siccome però la mente si costruisce a mezzo di una continua attività che è centrale (la mente) e periferica (i sensi, il movimento), possiamo assistere dall'esterno al suo lavorio.
La periferia, cioè, di quella attività totale - ci è accessibile. Infatti è continuo il ricorso dei sensi all'ambiente e l'attività motrice si riversa di continuo sopra di esso. Il bambino è per eccellenza un esploratore sempre in moto. Egli però *non assume a caso* le immagini di cui ha bisogno: anzi si dirige verso scopi determinati e precisi, con una forza di volontà che basta per sé sola[13] a rivelarci dei bisogni vitali.
Il bambino persiste nelle sue scelte con una costanza invincibile. Ciò è tanto vero (benché ancora non riconosciuto nel campo dell'educazione) che il maestro deve lottare contro le scelte del bambino, quando lo forza a seguire la propria linea di condotta[14]. Al maestro sembra ancora che il bambino per imparare, debba seguire quel filo dritto che si è tracciato come educatore. Il bambino invece ha un suo proprio modo di imparare: quello della scelta spontanea, dell'esercizio ripetuto, dell'attività insieme sensoriale e motrice che accompagna l'attività sensibile e psichica.
Noi dunque è verso la periferia che ci rivolgiamo come educatori. Invece di abbandonare il fanciullo alle sue ricerche in un mondo troppo complicato e inadatto, gli prepariamo, gli *mettiamo a portata* della sua periferia un mondo più ristretto e appropriato ai suoi bisogni: e cercando di interpretare questi dalle manifestazioni periferiche, vi corrispondiamo.

[12] "Esso" nel dattiloscritto.
[13] "Sole" nel dattiloscritto.
[14] "Condottiera" nel dattiloscritto.

Perciò la nostra è una *educazione dalla periferia* che sostituisce *l'educazione verso il centro* del vecchio modo. Il centro è lasciato libero di svolgersi secondo le energie naturali; e non è necessario per noi conoscerlo, né ripromettercene precise e determinate corrispondenze.
Necessario è rispettarlo.
Così è che assistiamo a un successo veramente sorprendente nella coltura, che i fanciulli riescono a conquistare: mentre la rivelazione dei procedimenti usati per tali conquiste - ci empie di gradito stupore.

Il periodo pre-elementare (infantile) dai 4 ai 6 anni di età

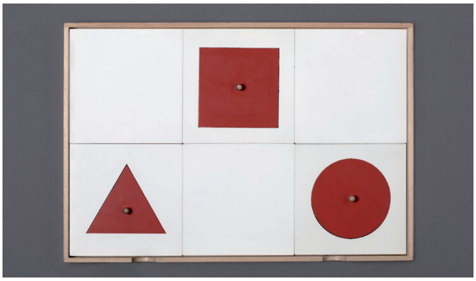
La geometria nella casa dei bambini

Quando, come in questo caso, ci proponiamo di esporre come si debba insegnare una materia determinata - dobbiamo rimanere perplessi. Infatti ogni singolo insegnamento non procede solo, dritto e separato - come si è abituati a considerare le cose in un programma delle scuole comuni.
Ogni materia di coltura si può paragonare a un rivolo d'acqua che scaturisce da una sorgente, s'ingrossa, scomparisce per qualche tempo nascosto sotto le pietre, poi torna fuori più lontano, si unisce con altri rivoletti, si isola ancora, prima di diventare un fiume che ha scavato finalmente le sue proprie sponde.
Ciò è analogo del resto alle origini storiche di ogni disciplina. Vediamo per esempio l'aritmetica e la geometria ora unirsi ora separarsi, prima di veramente stabilirsi in un completo sviluppo, e percorrere separatamente la propria strada.
Ora entriamo in argomento.
Come si svolge la geometria nella mente del bambino, a mezzo di aiuti periferici?
Partiamo da un'epoca della vita infantile in cui sono *sensibili* le conquiste sensoriali e motrici. È cioè in atto un complesso di sviluppi: sviluppo dei sensi, delle coordinazioni motrici e del linguaggio.
Non preoccupano le analisi, né le definizioni; ma il mondo esterno si va assumendo attraverso le sensazioni e la continua attività motrice che si esercita sugli oggetti circostanti.
Il bambino va ordinando le immagini[15], nella sempre più fine distinzione

[15] La frase non è chiara nel manoscritto, in quanto dopo la parola "immagini" sono riportati due punti ":". L'edizione spagnola riporta una sostituzione analoga a quella operata qui sul testo.

delle cose, e si va muovendo con possibilità sorprendente di perfezionamento nella coordinazione di movimenti fini e delicati.
È dunque l'età all'incirca di quattro anni, quando presentiamo nella Casa dei Bambini il primo materiale sistematico di forme geometriche piane.
Mi sia permesso di riportare qui la descrizione già fatta nel mio primo libro[16]. Il materiale che ha lo scopo di dare al bambino la prima rappresentazione sensoriale delle forme geometriche, consiste nei così detti incastri piani.
Cioè si tratta di piastrelle a forma geometrica regolare: triangolo, quadrato, rettangolo, circolo, ecc. che si possono incastrare perfettamente in una cornice (un'altra piastrella maggiore e sempre quadrata, che può incorniciare la piastrella geometrica a cui corrisponde, avendo un vuoto ove essa si può riporre esattamente).

Questo chiamiamo *un incastro geometrico*.



Fotografia 1

Siccome le piastrelle sono mobili, esse si possono successivamente togliere via e riporre nella rispettiva cornice. Però ogni piastrella può essere collocata esattamente soltanto nella propria cornice: e l'esercizio porta a una comparazione continua tra le forme e a un controllo materiale sulle identità e differenze. Che cosa c'è di identico tra la cornice e la piastrella? C'è di identico la *linea di contorno* della piastrella e dell'incavo che deve riceverla. Perché i due oggetti in se stessi sono molto diversi, e in certo modo opposti: la cornice ha dal lato esterno costantemente la stessa forma - un quadrato; invece le piastrelle hanno contorni esterni diversissimi (triangolo, rettangolo, circolo, pentagono, ecc.) Il quadrato delle cornici però ha *incavi* di contorno diversissimo, corrispondenti appunto a quelli delle piastrelle: ha un vuoto, una mancanza di materia.
L'apparecchio si presta a comparazioni tra le figure e perciò allo studio intuitivo di esse; e ciò per mezzo di esperienze attive fatte di spostamenti, di ricerche e di tentativi.

[16] La Montessori si riferisce a *Il Metodo della Pedagogia Scientifica applicato all'Educazione infantile nelle Case dei Bambini* (prima edizione 1909) ripubblicato successivamente con il titolo *La scoperta del bambino* (1950).

Ecco dunque oggetti che richiamano *l'attività del bambino*: attività complessa, che è insieme quella della mano che sposta, dell'occhio che riconosce, della mente che giudica; e un elemento astratto già comincia ad apparire come fulcro di tutta l'azione: è quel contorno comune, quella identità che consiste in oggetti diversi e opposti.

Per richiamare l'attenzione del bambino sul contorno, facciamo eseguire un esercizio speciale: cioè il bambino deve toccare tutto il contorno della piastrella geometrica e poi il contorno dell'incavo che sta nella cornice. I movimenti della mano seguono il contorno: e questo movimento, eseguito lentamente, esattamente e con molta attenzione, dà un'*idea motrice*. Il bambino può riconoscere anche *dal movimento* la forma del contorno, e mettere in rapporto la forma così rilevata come identica nella piastrella e nella cornice. Infatti gli esercizi proseguono senza l'aiuto della vista: a *occhi bendati*. Il bambino depone una serie di piastrelle nelle cornici, toccandone attentamente i contorni.

Fotografia 2

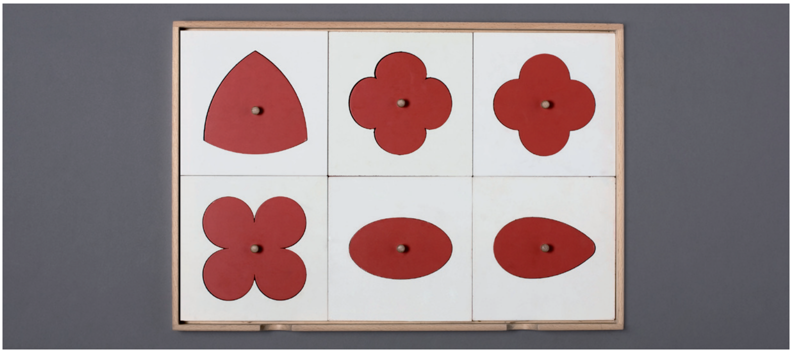
Il modo di presentare il materiale è di offrire in principio le forme più regolari e contrastanti: esempio, un triangolo equilatero, un circolo; di ciascuna delle quali figure si cerca l'identità di contorno, aggiustando la piastrella alla relativa cornice. L'apertura della cornice permette che vi si collochi solo la piastrella dovuta, perché l'altra non vi entrerebbe; infatti tutte le figure sono costruite in modo da avere un riferimento alla medesima dimensione lineare: 10 cm. Il triangolo equilatero ha il lato di 10 cm e uguale è il diametro del circolo. Così il triangolo non essendo inscritto nel circolo, non potrebbe entrarvi; né a maggior ragione, il circolo nel triangolo. Questa impossibilità materiale di sbagliare, è il *controllo dell'errore* insito negli oggetti stessi: così che il bambino una volta conosciuto l'uso degli oggetti, può procedere senza maestro.

Dopo le figure contrastanti, si usano più figure insieme, che sono differenti: triangolo, rettangolo, pentagono, rombo, trapezio, circolo.

Infine si danno sei figure che rappresentano possibilmente varietà e gradazioni della stessa forma: sei triangoli diversi (rettangolo isoscele, rettangolo scaleno, equilatero, acutangolo isoscele, ottusangolo isoscele, ottusangolo scaleno).

Il quadrato e cinque rettangoli che hanno un lato costante (10 cm) e l'al-

tro degradante successivamente di un cm fino al rettangolo che ha il lato minore di 5 cm.
Sei poligoni: dal pentagono al decagono, tutti costruiti in modo che siano inscritti in un circolo che ha 10 cm di diametro.
Sei circoli di cui il maggiore ha diametro di 10 cm e il minore di 5 e gli altri il diametro successivamente degradante di un cm dal primo all'ultimo.
Infine sono riprodotte nel materiale figure varie a contorni curvi: un triangolo equilatero, una ellisse, un ovale, due fiori costruiti sullo stesso quadrato, uno sul lato e uno sull'angolo.



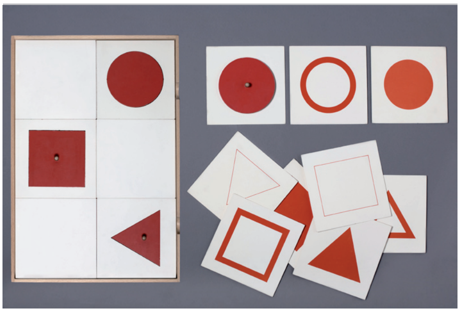
Fotografia 3: figure che si presentano insieme al circolo

L'importanza di avere una cornice d'incastro non è solo quella di ottenere nel materiale stesso *un controllo dell'errore*, che permette al bambino di procedere da solo negli esercizi educativi. La cornice richiama anche l'attenzione sulle particolarità che differenziano le varie forme, quando il bambino cerca per tentativi la cornice delle piastrelle o si interessa a girarle e rigirarle con lo scopo di deporle possibilmente in diversi sensi.
Il quadrato per esempio, si può spostare dai quattro lati ed entra sempre, invece il rettangolo, se non si appoggia in modo che i lati maggiori e minori si corrispondano, rimane fuori dalla cornice. Il quadrato, tuttavia, non si può rigirare nella cornice tante volte come un poligono e questo, dal pentagono al decagono, fa passi sempre più piccoli nel suo giro.
Finalmente il circolo si può girare tutto attorno senza alcuna interruzione.
La ellisse si può far entrare solo quando l'asse più lungo sia in corrispondenza della maggior altezza dell'incavo che sta nella cornice; nell'ovale invece non solo è necessario che corrisponda la direzione secondo la lunghezza, ma pure che l'estremo più largo e quello più stretto siano posti in corrispondenti rapporti con la cornice.

Bastino questi accenni per comprendere come questo materiale possa insegnare senza intervento del maestro[17] la differenza tra le figure.
Il maestro interviene non solo nel presentare gli esercizi, ma pure nell'insegnare i nomi di alcune delle forme geometriche che il bambino ha imparato a distinguere: triangolo, quadrato, rettangolo, circolo, trapezio, rombo, ellisse, pentagono, esagono, ottagono, con la nota lezione dei tre tempi (vedi opera citata).
Non si tratta dunque soltanto di una cognizione che penetra nella mente del piccolissimo bambino. In lui si *svolge* qualche cosa che entra a far parte della sua vita mentale: è un *senso geometrico* che si immedesima col suo organismo psichico in via di attiva creazione.
Gli occhi del bambino sono oramai attratti dalla parte geometrica dell'ambiente circostante; gli occhi sono attratti dalla luce che li penetra naturalmente. Il piano della tavola rettangolare, gli esagoni delle mattonelle del pavimento, i circoli dei piatti, i quadretti delle salviette, le ellissi delle cornici dei quadri, tutto: porte, finestre, decorazioni hanno un significato nuovo. Il piccolo bambino è come assalito da queste immagini che penetrano in lui per una attrazione intima (vedi opera citata).
Queste *attitudini della mente* - la osservazione spontanea davanti a una sensibilità interiore - sono qualcosa di molto diverso da ciò che consideriamo un *apprendimento logico*.
Attaccare qualche fondamento di una disciplina ai periodi sensitivi, vuol dire *preparare* nella personalità attitudini che predispongono a comprendere, vuol dire depositare dei germi permanenti di interesse nell'intelligenza. Le figure geometriche rappresentate nelle piastrelle, vengono ripetute come semplici disegni sopra tre serie di cartoncini quadrati, che hanno la stessa dimensione delle cornici. Su di essi le figure sono disegnate e riproducono in una prima serie le piastrelle degli incastri dipinte nella stessa dimensione e colore, poi in una seconda serie ne riproducono il contorno con una striscia colorata e infine in una linea sottile (vedi opera citata).
La linea di contorno, già tante volte percepita dal movimento della mano, è ora isolata e visibile.
Infiniti esercizi e applicazioni sono ispirati dalle combinazioni delle piastrelle (che ormai si usano senza le cornici) coi cartoncini.
I fanciulli si riuniscono in gruppi per lavorare con questo materiale copioso: disponendo variamente i cartelli, cercando di sovrapporvi le piastrelle corrispondenti, ovvero cercando di ricordare una forma e raccogliendone

[17] Nel manoscritto invece della parola "maestro" si legge "nostro". Nell'edizione spagnola la frase "senza intervento del maestro" è omessa.

le rappresentazioni varie del disegno che vi corrisponde, oppure cercando nella riunione mescolata e confusa di tutti i cartelli i tre che portano la stessa figura.



Fotografia 4

Tutto questo è il giuoco di trovare le identità tra le varietà: così tra le varietà di forme, come tra le varietà di rappresentazioni della forma medesima. È questo l'esercizio primordiale che mette in rapporto il bambino (tra tre o quattro anni di età) con le forme geometriche. Le sue conoscenze sono intuizioni di insieme, ricevute a traverso una esperienza attiva.

Disegni decorativi geometrici

Un secondo stadio è costituito da un giuoco di figure geometriche, accompagnate da disegni.

Tale disegno (l'arte degli incastri) ebbe come punto di partenza[18] lo scopo immediato di preparare la mano a scrivere.

Ecco in che esso consiste: vennero scelte alcune delle figure geometriche descritte prima, e preparate con altro materiale, cioè con ferro anzichè con legno. Il ferro si presta per la pesantezza e la esattezza dei contorni lineari a servire come traccia per il disegno, come potrebbe essere una riga, una squadra, ecc.

Le figure hanno la stessa dimensione fondamentale (10 cm) e rappresentano esattamente in forma e grandezza alcune di quelle già usate. Cioè:

1- il triangolo equilatero (10 cm di lato)
2- un ottagono
3- un fiore costruito sugli angoli
4- il quadrato (10 cm di lato)
5- il rettangolo (10 x 5)
6- il circolo grande (10 cm di diametro)
7- il circolo piccolo (5 cm di diametro)
8- il triangolo a lati curvi
9- un fiore (costruito dal centro del lato di un quadrato)

[18] La traduzione dell'edizione spagnola, in cui "come punto di partenza" è omesso, modifica il senso della frase della Montessori.

10- un trapezio
11- un pentagono
12- una ellisse
13- un rombo
14- un ovale
Queste figure sono pure fornite di una cornice di ferro a forma quadrata uguale a quella degli incastri di legno[19].
Le 14 figure sono distribuite su due leggii e rimangono sempre esposte alla scelta dei bambini. Unitamente a tale materiale, che guida al disegno, ci sono dei materiali di consumo come: dei fogli di carta da disegno grandi come le cornici, di tutti i colori possibili e anche fogli di grandezza varia e una collezione di lapis colorati, ricca così in tinte come in gradazione (circa 60 colori). Bisogna riflettere che i bambini con altri materiali usati parallelamente a quelli descritti con gli incastri piani, avevano fatto molti esercizi sui colori: cosicché hanno non solo l'occhio sensibile a distinguere le più delicate gradazioni, ma anche un senso di osservazione verso l'ambiente analogo a quello che li rendeva così acuti nel riconoscere le forme geometriche.

Un'armonia tra i colori e le forme è dunque accessibile a quei bambini la cui mano si è abituata e resa abile a seguire esattamente dei contorni.
Dato che essi si trovano nel periodo sensitivo, si viene[20] formando in loro quasi *un temperamento artistico*, che tuttavia rimane ancora come un'energia latente. Basta dare i materiali necessari, iniziare a una tecnica esecutiva e poi lasciare i bambini alle loro scelte e ai loro esercizi. Ciò che noi insegnamo a questo punto è un esercizio preparatorio alla scrittura. Posta la cornice di ferro sopra uno dei fogli quadrati, si insegna a seguire il contorno interno con un lapis colorato: rimane così sul foglio il disegno di una figura. Sopra il disegno si cerca di adattare la piastrella di ferro rappresentata dalla figura stessa, in modo che sia esattamente sovrapposta al disegno; allora con un altro lapis colorato si disegna tutto attorno la piastrella. Rimane così sulla carta un disegno solo a doppio contorno: e le due linee ricordano i movimenti della mano attorno alla piastrella di legno e alla sua cornice nei precedenti esercizi.

[19] Questa lista, che manca nell'opera citata del 1909, è molto dettagliata. Il fatto che Psicogeometria non sia stata mai più pubblicata ha fatto sì che alcuni di questi materiali non siano oggi prodotti dalle aziende specializzate, o siano prodotti con caratteristiche che non consentono di eseguire le attività suggerite nel testo. È anche curioso notare che nella lista manca l'incastro esagonale che viene più volte esplicitamente menzionato nel seguito.
[20] "Venne" nel dattiloscritto.

Là era *una preparazione della mano* a seguire un contorno determinato: qui è la mano che eseguisce effettivamente un disegno secondo quel contorno.

Fatto ciò si insegna al bambino a riempire tutto l'interno della figura disegnata a mezzo di tratteggiature, maneggiando il lapis come una penna da scrivere quando si eseguiscono le asteggiature. Questo esercizio prepara la mano a maneggiare la penna, o meglio prepara la mano *all'esecuzione di quei movimenti* senza scrivere. Empire di tratti colorati le figure delineate è un esercizio in sé piacevole, e porta alla ripetizione spontanea di sì gran numero di esercizi, che la mano si fa ben presto forte e sicura e pronta ad eseguire una scrittura quasi perfetta.

Tale inizio, dunque, non ha lo scopo di apprendere a disegnare, né pretende di entrare tra gli esercizi di "disegno libero" oggi tanto difesi e lodati dalla pedagogia moderna. Al contrario: questi disegni hanno lo scopo di *trattenere* la mano, per condurla a coordinare quei movimenti meccanici (l'asteggiatura) indispensabili alla scrittura. La prigionia della mano è dolce e gli esercizi sono estremamente piacevoli, e fanno superare una difficoltà pratica sotto un aspetto attraente.

Benché lo scopo sia di rendere la mano abile all'asteggiatura, è un disegno quello che ne consegue, ed un disegno che porterà allo sviluppo di un'arte decorativa assai artistica. Quest'arte è veramente un *frutto* di tante preparazioni indirette e si può dire che l'esercizio che ci eravamo proposto solo per la scrittura, era invece un germe di arte che da esso si svolge e si fa ben presto indipendente.

È dunque di questi disegni che dobbiamo ora occuparci.

Avendo essi come base delle figure geometriche e delle figure che sono tra esse in rapporto di dimensione (10 cm) ne conseguono *composizioni* di forme che portano intuitivamente a una osservazione più analitica delle figure stesse e dei loro reciproci rapporti.

La prima cosa che si insegna è di non mai sorpassare coi segni di tratteggi la linea di contorno della figura. Ciò porta indirettamente a una osservazione ripetuta e particolareggiata dei contorni.

Quale differenza, per esempio, empire esattamente di segni un angolo del triangolo equilatero, e uno degli angoli dell'ottagono! E come bene si rileva, per una prolungata esperienza, il numero e la direzione dei lati, e la forma complessiva che ne consegue! Come chiaro risulta l'assenza di angoli nel circolo che è tanto difficile eseguire esattamente nei contorni, mentre l'angolo è sempre una forma che facilita quel lavoro.

Il quadrato, il rettangolo, il trapezio risultano nelle loro differenze: con sempre lo stesso angolo, e quindi lo stesso lavoro di riempitura, nei due primi poligoni; invece il trapezio ha angoli tutti diversi[21], o meglio eguali a due a due, e sempre diversi da quell'angolo che è costante in tutti i rettangoli.

Con questi disegni, dunque, che i bambini eseguiscono con passione producendone una quantità indefinita (forse dieci e più disegni al giorno per mesi e mesi) attratti come sono dal lavoro in sé, dai colori delle carte e dei lapis, e dal piacere di produrre cose belle, i piccoli bambini tra quattro e cinque anni vengono ad assumere per esperienza l'intuizione di caratteri analitici delle figure geometriche: lati, angoli, ecc.

Ben presto, in questa formidabile produzione di migliaia di disegni, viene fuori una composizione, una combinazione di forme, che è una vera *creazione* decorativa. Il circolo (10 cm di diametro) si può inscrivere nel quadrato (10 cm di lato). Il circolo minore (5 cm di diametro) entra nel rettangolo stretto (lato minore, 5 cm). Con il triangolo equilatero si forma una stella, e le punte di essa riunite da linee danno il disegno di un esagono, esagono più grande di quello dato dalla piastrella di ferro esagonale (fig. 1).

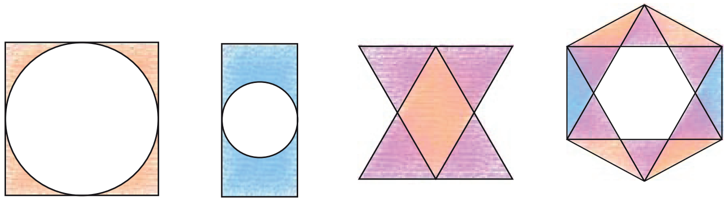


Figura 1

In modo analogo, col quadrato si ottiene un ottagono maggiore di quello della piastrella. Si può dunque semplicemente delineare un esagono o un ottagono con le piastrelle relative e *costruirne* altri con il triangolo e col quadrato. Il trapezio (che è ricavato tagliando alla metà dell'altezza il triangolo equilatero) si presta pure a combinazioni varie[22] col triangolo equilatero perché soprapponendo successivamente il trapezio su ognuno dei tre lati del triangolo e disegnando la linea secondo la base minore, il triangolo equilatero viene diviso in quattro piccoli triangoli uguali (fig. 2).

[21] "Divisi" nel dattiloscritto. Il traduttore spagnolo ha omesso tutta la frase.

[22] Da questo punto, fino alla pagina che contiene una breve descrizione dei poligoni regolari, le pagine del dattiloscritto presentano a fianco della numerazione un simbolo (I) scritto a mano.

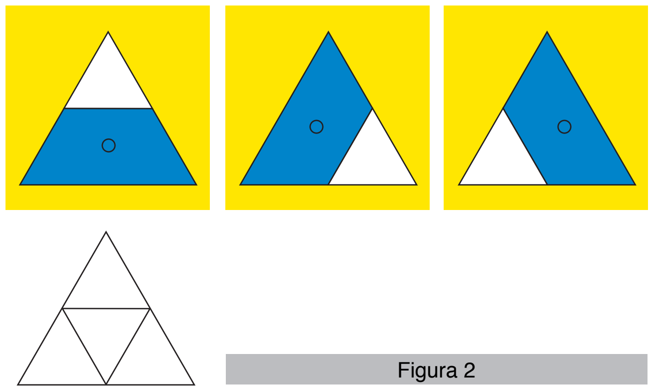


Figura 2

Basti accennare a queste possibilità per comprendere subito come le forme geometriche si prestano a infinite combinazioni: le quali portano sempre più a rilevare per una conoscenza intuitiva i rapporti fra le figure[23] geometriche. A poco a poco altri mezzi e altre tecniche vengono offerti ai bambini, come acquerelli, inchiostri colorati, pastelli ecc.: e ne consegue la creazione di varietà[24] infinite di composizioni decorative, le quali rivelano un senso di armonia estetica che va svolgendosi nell'animo infantile.
Il bambino è condotto a una osservazione minuziosa dei dettagli, a una analisi, e a combinazioni collegate coi caratteri delle figure geometriche: e ciò non per l'esortazione e la guida di un maestro. È la creazione artistica che diventa maestra di geometria: e i prodotti bellissimi che ne conseguono sono lo stimolo costante e il premio continuo di un progresso imposto dall'impulso irresistibile dell'animo di ciascuno.

Studio differenziale dei contorni

Tutto quanto fu descritto relativamente al periodo infantile è uno dei veri insegnamenti di geometria[25]. La preparazione suddetta appartiene a un

[23] La parola "figure" manca nel manoscritto. Nella traduzione spagnola la frase è espressa in modo più involuto.
[24] Nel manoscritto compare la frase "della mente" che è priva di senso. Potrebbe essere un refuso per "veramente" o un altro avverbio analogo. Nella traduzione spagnola "la creazione di varietà della mente" è diventato "la creazione nella sua mente di varietà". L'intervento del traduttore sembra però improbabile.
[25] Il testo è forse corrotto per una errata interpretazione del manoscritto da parte del dattilgrafo. Nella traduzione spagnola la parola "veri" è resa con "autentici".

periodo di istruzione preelementare. Si possono riassumere in tre gruppi gli esercizi svolti; essi hanno finalità di successivo e graduato progresso, cioè[26]:

1° Toccare la piastrella e la relativa cornice per constatare col movimento l'identità del contorno, in oggetti opposti, richiama l'attenzione sulla linea e ne dà l'intuizione astratta.

2° I tentativi di mettere le figure in varie cornici, e quello di girare le figure per provare in quante posizioni possono essere incastrate nella cornice corrispondente, dà una conoscenza intuitiva differenziale molto precisa delle figure e dei loro contorni.

3° Il disegno con gli incastri di ferro, che porta a combinazioni decorative dà una intuizione complessa sui rapporti reciproci tra le varie figure.

Dopo quelle serie di esercizi è conseguenza logica e necessaria uno studio delle linee[27] e degli angoli e una esatta definizione delle varie figure piane.

Lo studio si accompagna con la *costruzione* geometrica lineare[28] e col rilievo decorativo degli elementi geometrici (linee, angoli, punti).

Questo procedimento[29] del primo grado elementare rappresenta da un lato l'analisi delle parti di ciascuna figura e dall'altro la costruzione precisa e tecnica di esse[30]: ciò che trasporta verso un campo superiore, e astratto, quell'attività svolta primitivamente dai piccoli bambini su un maneggio di oggetti che si spostano e si riordinano successivamente. Inoltre qui non è più con la sola parola, cioè il nome della figura che col linguaggio si associa alle conoscenze, ma è la definizione che si presenta come l'indicazione proporzionata allo studio dei caratteri differenziali tra le figure stesse[31]. Ma prima di entrare in tali studi, o almeno parallelamente ad essi, è bene richiamare l'attenzione sul *piano* (due dimensioni) iniziando la sua presentazione con gli esercizi di squadratura del foglio[32]. Gli insegnamenti cui accenniamo si riferiscono al primo periodo di istruzione elementare ma essi possono[33] procedere e accompagnare parallelamente anche un periodo

[26] La frase " essi hanno finalità di successivo e graduato progresso, cioè" manca nell'edizione spagnola e le frasi successive, un poco involute nel testo italiano, sono tradotte con una certa libertà.

[27] "Lingue" nel dattiloscritto.

[28] Si intende costruzione con riga e compasso, v. oltre.

[29] Spesso la Montessori usa il verbo "procedere" nel senso di "approfondire".

[30] "Esso" nel dattiloscritto.

[31] Il punto che separa le due frasi non è presente nel dattiloscritto.

[32] Seguono nel dattiloscritto diverse linee cancellate, che riportano una frase che appare nella pagina successiva (quella che inizia con "Lo stesso si dica...").

[33] "Esso può" nel dattiloscritto.

elementare successivo. Si cominciano col dare istrumenti che servono a costruire le figure, finora disegnate sulla guida degli incastri; nello studiare le figure nelle loro parti: (linee, angoli) e nel darne esatte definizioni. Un insegnamento che appoggia sopra ampie nozioni intuitive ricavate da una lunga esperienza è simile a una luce che rischiari ciò che già esiste. E veramente questo dovrebbe essere l'ufficio della *definizione*. La definizione deve venire dopo la conoscenza e non viceversa. La definizione cioè, è un passo successivo a quello del conoscere.

Essa allora corrisponde a una tendenza naturale della mente, che è quella di precisare e ordinare i suoi acquisti.

Lo stesso si dica degli studi analitici e costruttivi: essi sono interessanti come approfondimento nel dettaglio di cose già note. Venire a una analisi minuziosa per determinare le particolarità di ogni figura e procedere ai pratici dettagli tecnici per costruirla esattamente è quasi un cammino naturale della mente, uno svolgimento dell'interesse già suscitato.

Questa parte non esclude il lato artistico: i fanciulli possono rilevare i dettagli con motivi decorativi: e combinando i nuovi acquisti coi vecchi, svolgere in una unità di sviluppo la costruzione della loro coltura.

I primi strumenti che si danno in mano ai bambini sono: la riga, la squadra, il compasso: prima il compasso a lapis, poi il compasso fornito di tiralinee per l'inchiostro, come pure il tiralinee per tracciare linee con inchiostri densi (inchiostro di china).

Anche varie penne vengono date come istrumenti di tracciati liberi.

Ciò viene offerto a poco a poco e si vedrà come i bambini siano trattenuti lungamente su ogni particolare, per la ricchezza inesauribile della loro immaginazione e per la pazienza considerevole con cui intraprendono lunghi ed esatti lavori.

La squadratura del foglio

Cornici e decorazioni

Il piano su cui si disegna. Considerare il foglio di carta come il piano che riceve il disegno delle figure (una idea parallela a quella delle cornici che ricevono gli incastri) è un modo logico di iniziare i disegni costruttivi. Con la riga disposta diagonalmente e collocata esattamente sull'angolo del foglio[34] si disegnano le due diagonali intersecantesi nel punto centrale. Puntando poi in questo punto il compasso al lapis si determinano sulle

[34] Nella traduzione spagnola il procedimento è descritto con un poco più di dettaglio. Tutta questa parte di testo sembra un po'provvisoria.

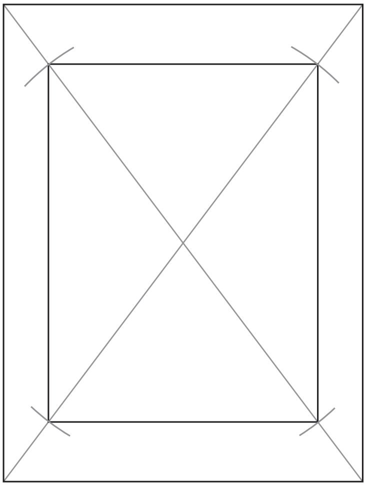


Figura 3

diagonali quattro punti equidistanti dal centro. Riunendo tra loro questi quattro punti in un rettangolo, resta disegnato un contorno. Tale contorno (la squadratura) è disegnato con il lapis colorato o con inchiostri: mentre il resto che ha servito per la costruzione, si cancella (fig. 3).

Invece di solo quattro punti equidistanti se ne possono disegnare altri quattro a qualche distanza e resta allora una *doppia squadratura*, un *doppio contorno*. Appena indicata ai bambini questa nuova conoscenza, essa fu accolta con vivo interesse, non solo, ma applicata ampiamente. Essi vollero subito adornare di squadrature tutti i loro lavori, e le pagine dei quaderni: come se la squadratura fosse il complemento ordinario di ogni lavoro di scrittura.

Un'altra applicazione spontanea dei bambini fu la decorazione delle squadrature, nelle linee e negli angoli: ed è veramente sorprendente la pazienza dimostrata dai bambini in quei lavori minuziosi, e ammirabile la grande varietà di ornamenti che hanno saputo immaginare (fig. 4).

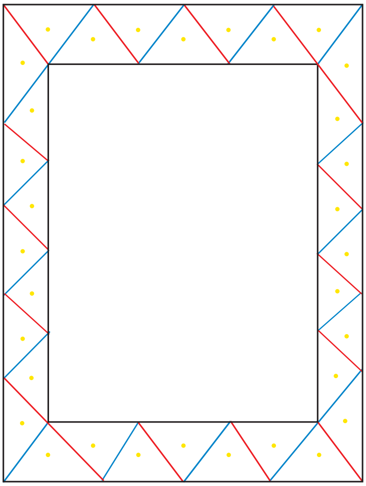


Figura 4

Le preparazioni precedenti resero tanto piena o satura la loro immaginazione creativa e moltiplicarono talmente le loro energie, che bastò offrire un nuovo mezzo, per vedervi depositata una ricchezza di espressioni. Così mettendo un filo in una soluzione cristallina satura si vedono depositarsi su di esso dei cumuli di cristalli.

La squadra presenta un angolo speciale, un angolo diritto o retto.

Se si applica la squadra sull'angolo della cornice costruita attorno al foglio si vede con esso la sua identità.

Angolo è l'incontro di due linee.

Le due linee dell'angolo s'incontrano in un *punto*.
Anche le due linee diagonali del foglio, disegnate per la squadratura, s'incontrano in un *punto*: il centro in cui si è fissata la punta del compasso.
Se si fa scorrere la squadra lungo una delle linee laterali delle cornici si possono di volta in volta disegnare delle linee che sono tutte nella medesima direzione: esse sono linee *parallele* (fig. 5).
Anche quando si disegna una doppia cornice, le linee che formano da ogni

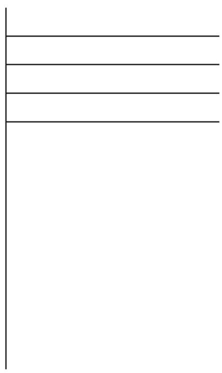


Figure 5

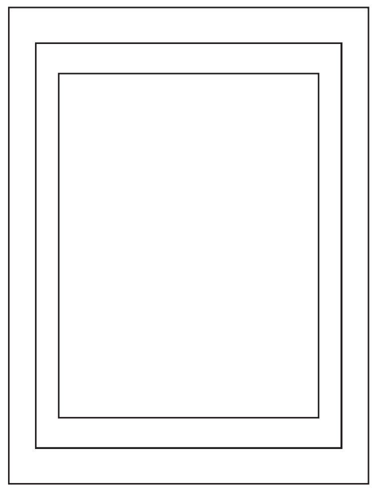


Figure 6

lato il doppio contorno, sono tra esse parallele (fig. 6).

Determinazioni elementari

Linee ed angoli[35]

Due linee parallele sono ugualmente distanti l'una dall'altra e non s'incontrano mai[36].

[35] Nel dattiloscritto compare una A), come se questo fosse il primo elemento di una enumerazione, ma mancano gli elementi successivi. Inoltre il titolo "Determinazioni elementari - Linee ed angoli" compare in una pagina a parte, mentre nella pagina successiva, che riporta il testo seguente, il capitolo prende il titolo "Elementi lineari". Si è preferito riportare il titolo "Linee ed angoli", che sembra più pertinente.

[36] In questo punto e poche righe sotto, è ripetuta due volte, scritta a mano in modo poco chiaro, una parola che dovrebbe essere "Imprenta". Il testo che qui viene inserito nella figura

Due linee parallele

essendo sempre ugualmente distanti l'una dall'altra

non s'incontrano mai tra di loro

perciò due linee parallele
comunque si prolunghino
non possono mai fare un angolo tra di loro

Figura 7

Le linee che non sono parallele continuando a prolungarsi si avvicinano da un lato e si allontanano dall'altro (fig. 8)

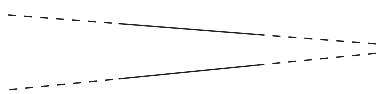
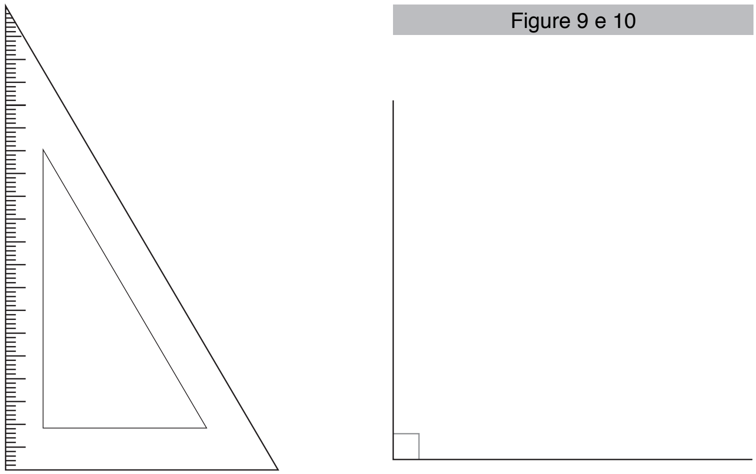


Figura 8

Tali linee sono *oblique*.
Dalla parte ove si avvicinano, finiscono per incontrarsi in un punto e formano un angolo: la loro direzione in tal caso è *convergente*. Dalla parte opposta ove si allontanano sempre più sono invece *divergenti*.
L'angolo della squadra è un angolo retto (fig. 9).
Le due linee che si incontrano in una direzione così diritta, si chiamano tra loro *perpendicolari* (fig. 10).

è racchiuso in un riquadro. Si noti che la parola spagnola imprenta significa "Matrice tipografica". Sembra ragionevole, dunque, interpretare questa parola come una indicazione precisa (qui e successivamente) di considerare il testo dentro al riquadro come un figura esplicativa. Il testo di questa illustrazione è stato completamente omesso nella traduzione spagnola, in cui compare solo l'immagine successiva, riguardante l'assenza di angoli..

Figure 9 e 10



Le linee che non s'incontrano perpendicolarmente non formano mai angoli retti, ma angoli che sono diversi dal retto, cioè minori o maggiori del retto.
Se formano angoli minori del retto, questi si chiamano angoli *acuti* (fig. 11).
Se invece, incontrandosi, formano un angolo maggiore del retto, questo angolo si chiama ottuso (fig. 12).

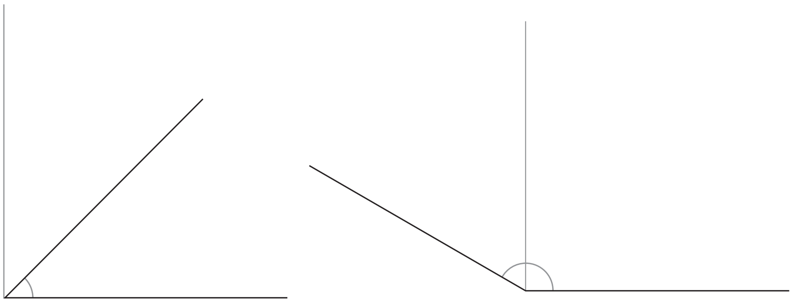


Figure 11 e 12

Figure - il triangolo

Costruzioni di figure. Il triangolo è una figura chiusa composta di tre linee: esso ha tre angoli.
Modo di costruire un triangolo regolare: si tira una linea: poi si fissa la punta del compasso a un estremo di essa, e si apre il compasso in modo che l'apertura sia grande come è lunga la linea, così che la punta del lapis tocca l'estremo opposto della linea stessa.
Poi girato in alto il compasso, si descrive un arco.
Appuntato poi il compasso con la stessa apertura all'altro estremo della linea, si descrive pure in alto un altro arco.
Le due linee ad arco si incontrano in un punto.
Unendo questo punto, a mezzo di linee, con gli estremi della prima linea tracciata, si ottiene un triangolo regolare (fig. 13).

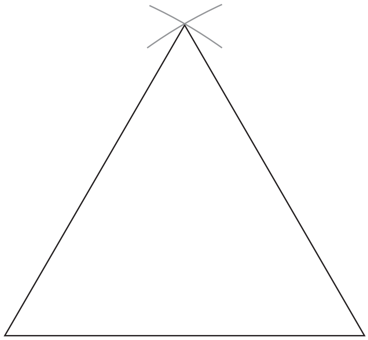


Figura 13 - triangolo equilatero

Il triangolo che abbiamo costruito ha le tre linee tutte eguali tra loro.
Le linee che chiudono un triangolo si chiamano *lati del triangolo*.
Il triangolo che ha i tre lati uguali, come è questo, si chiama *equilatero*.
Il triangolo che ha tre lati eguali, ha anche gli angoli tutti uguali tra di loro, perciò si chiama anche: *equiangolo*[37].
Adesso facciamo un'altra costruzione di triangolo. Invece di aprire il compasso alla stessa lunghezza della linea che abbiamo tracciato in basso, apriamolo meno: e poi tracciamo i due archi che s'incontrano in un punto al di sopra. In questo caso il triangolo ha due lati tra loro uguali, ma minori della linea in basso (fig. 14).
Costruiamo ora un altro triangolo, prendendo una apertura di compasso maggiore della linea in basso: questo avrà due lati tra loro uguali, ma maggiori della linea in basso (fig. 15).
Quando un triangolo ha due dei suoi lati uguali tra loro si chiama *isoscele*.

[37] Il testo presenta il triangolo equilatero dal punto di vista della sua costruzione con riga e compasso, ma inserisce in questa presentazione anche nozioni molto generali, come la definizione di lato di un triangolo. Le definizioni che riguardano il triangolo equilatero sono poi ripetute tre volte in poche pagine.

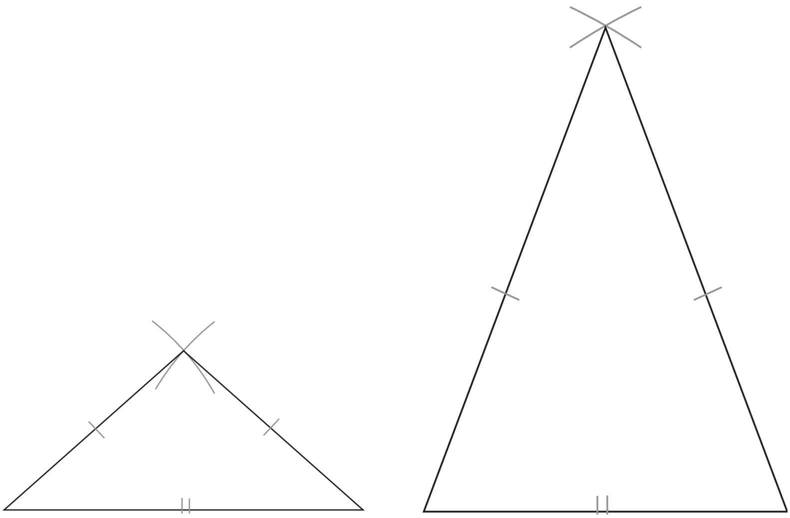


Figure 14 e 15 - triangoli isosceli

Infine quando i tre lati di un triangolo sono tutti tra loro diversi, cioè di diversa lunghezza, il triangolo si chiama *scaleno* perché i tre lati sono a scala[38]. Non c'è bisogno di una costruzione speciale per disegnarlo: basta tracciare tre linee che si incontrano (fig. 16).

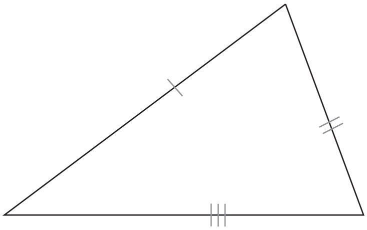


Figura 16 - triangolo scaleno

[38] La figura relativa a questo testo non mostra i lati a scala e il nome scaleno ha un'etimologia diversa, però il suggerimento della Montessori è utile per memorizzare il nome scaleno. Il concetto viene illustrato più oltre, nella figura 20 che suggerisce la costruzione di questi concetti nel quaderno di geometria.

Se un triangolo ha un angolo retto, come la squadra, si chiama: *triangolo rettangolo* (fig. 17).

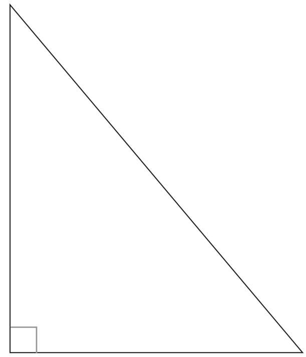


Figura 17 - triangolo rettangolo

Se un triangolo ha un angolo ottuso, si chiama: *triangolo ottusangolo* (fig. 18).

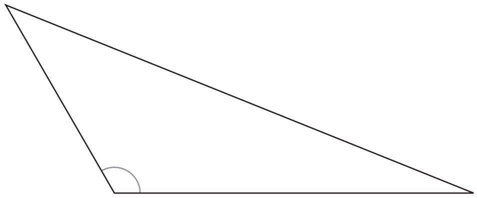


Figura 18 - triangolo ottusangolo

Quando un triangolo non ha né un angolo retto, né un angolo ottuso, allora li ha tutti acuti e si chiama: *triangolo acutangolo* (fig. 19).

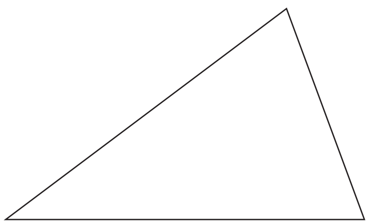


Figura 19 - triangolo acutangolo

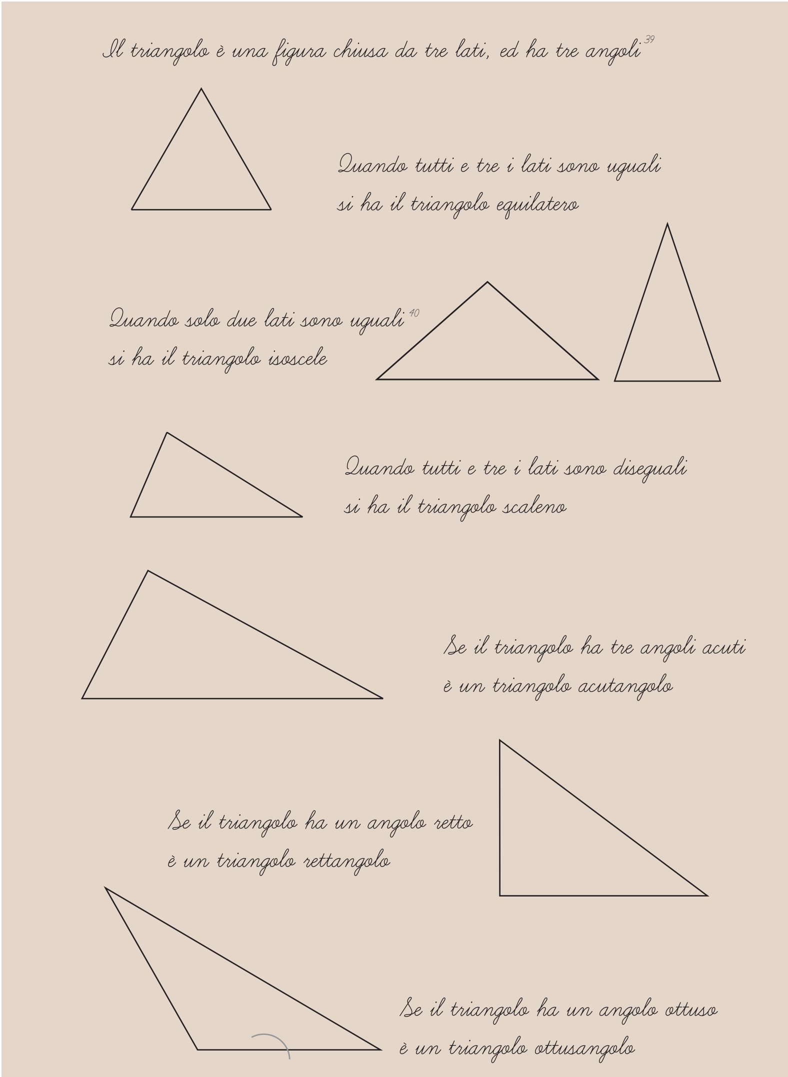


Figura 20

[39] Questa illustrazione (fig. 20) viene interpretata nel dattiloscritto e poi nella edizione a stampa come un seguito del testo. Ne risulta un brano senza il quale tutto il resto sarebbe perfettamente autoconsistente.

[40] Il dattiloscritto riporta un "uguali" poi cancellato e sostituito con "diseguali". Nel testo dell'edizione spagnola è riportato "uguali".

Le forme di triangolo più importanti sono due[41].
Una è il triangolo equilatero, che è pure equiangolo - ha tutto: lati e angoli uguali. È la forma più regolare tra tutti i triangoli (fig. 21).

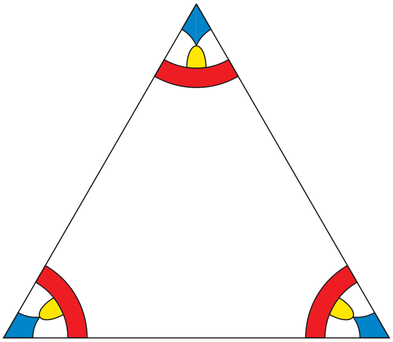
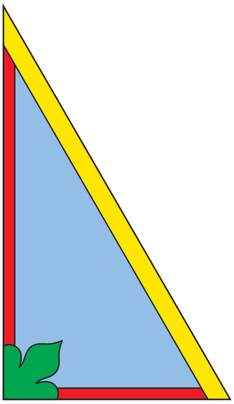


Figura 21 - equilatero-equiangolo il più regolare tra i triangoli



L'altra forma più importante di triangolo è quello *rettangolo*.
Ecco il lato che cade perpendicolarmente sull'altro e forma l'angolo dritto, l'angolo *retto* (fig. 22).
I due lati che, incontrandosi assieme, formano, nel triangolo, l'angolo retto, prendono un nome speciale: si chiamano: *cateti*.
E l'altro lato che rimane, e che sta di prospetto all'angolo retto, pure prende un nome speciale, si chiama: *ipotenusa*.

Figura 22 - triangolo rettangolo

Gli altri triangoli non hanno speciali denominazioni dei loro lati. Soltanto se si considerano i triangoli appoggiati con un lato in basso, tutto disteso - e un angolo che rimane in cima, (come abbiamo visto costruendo i triangoli con la riga e il compasso) allora quella linea in basso si chiama: *base* del triangolo, e quell'angolo in cima, si chiama *vertice* del triangolo.
Girando il triangolo comunque, prende il nome di base quel lato che sta giù e vertice l'angolo opposto: e se di giro in giro si appoggia un lato dopo l'altro in giù, ognuno di questi lati diventa di volta in volta *base* - e l'angolo opposto il *vertice* (fig. 23)[42].

[41] Questa terza ripetizione delle definizioni di triangolo equilatero e rettangolo ha un senso preciso, perché l'autrice vuole dire che questi due triangoli sono i più importanti. Effettivamente essi sono i più studiati, per es. negli *Elementi* di Euclide. Le figure qui riprodotte sono nel manoscritto, e anche nell'edizione a stampa, molto curate.
[42] La figura è nel manoscritto molto approssimativa e i triangoli che rappresentano lo stesso

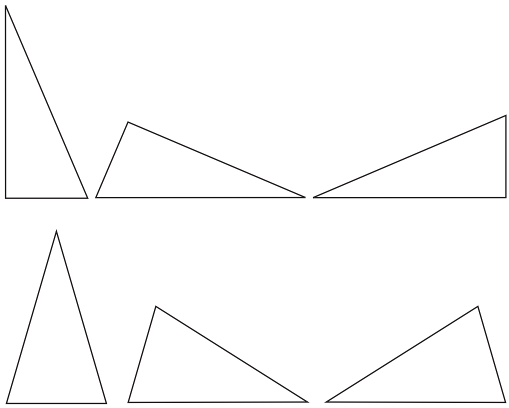


Figura 23

Se poi si considerano insieme tutti i lati che chiudono il triangolo come una linea spezzata in tre parti e rigirata su se stessa - allora quell'insieme chiuso, cioè il contorno intiero, si chiama il *perimetro* del triangolo.
Il perimetro del triangolo è formato di tre lati.

Ancora gli incastri piani

Si faccia ora uno studio dei triangoli e dei nomi rispettivi, riprendendo il quadro che ha i suoi triangoli di legno e le relative cornici, e le tre serie di cartoncini che ne riportano le figure a pieno, le figure delineate da una striscia e le figure segnate da una linea.
Ci sono a parte[43] dei cartelli in una ventina di copie ciascuno, essi riportano i seguenti titoli (fig. 24).

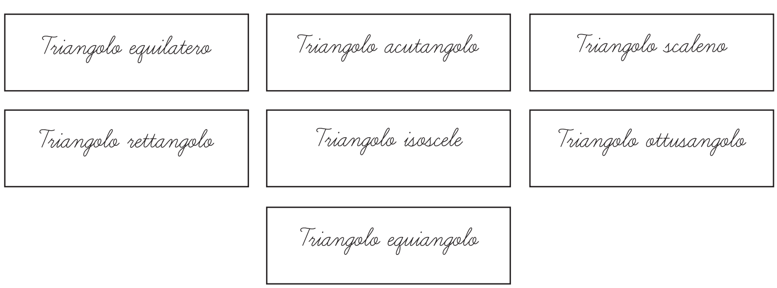
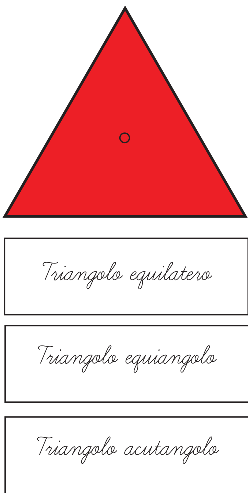


Figura 24

triangolo nelle sue tre possibili posizioni non sono esattamente uguali. L'edizione a stampa riporta lo stesso errore.
[43] Questo materiale non è disponibile attualmente.

Si scelgono prima le piastrelle triangolari di legno, e si dispongono sotto a ciascuna i cartelli che vi si adattano. Per es. - sotto il triangolo equilatero potranno adattarsi tre cartelli: triangolo equilatero, triangolo equiangolo, triangolo acutangolo (fig. 25)



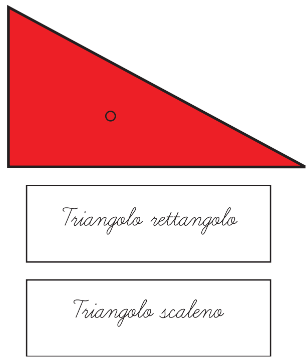


Figure 25 e 26

sotto il triangolo rettangolo potranno adattarsi quest'altri cartelli: triangolo rettangolo, triangolo scaleno (fig. 26)
sotto l'isoscele: triangolo isoscele, triangolo acutangolo (fig. 27).

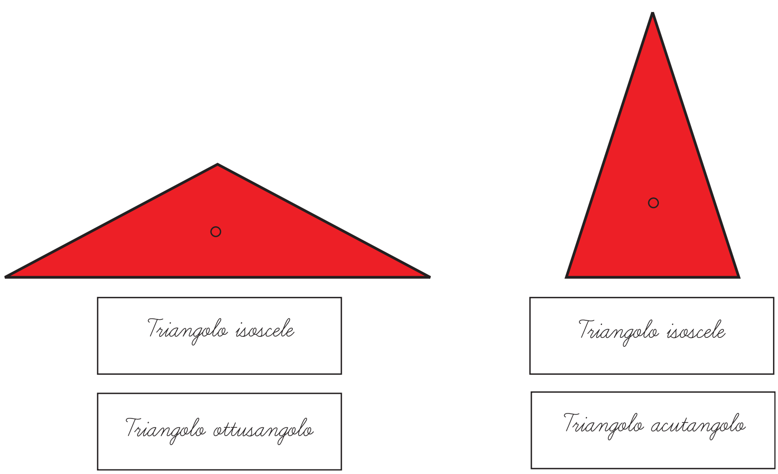


Figura 27

La stessa combinazione di figure e cartelli può ripetersi con le altre serie di cartoncini. Da qui risulta chiaramente ogni definizione - p. es. il triangolo equilatero ha tutti gli angoli acuti e uguali tra loro e i lati uguali. Ed è possibile di studiare le diverse combinazioni tra lati e angoli, che altrimenti potrebbero portare confusione: perché il triangolo rettangolo può essere isoscele e scaleno, così l'ottusangolo, ecc. E le diverse denominazioni secondo gli angoli o secondo i lati restano chiarite.

Decorazioni

Lo studio delle linee e degli angoli, delle varie forme dei triangoli ecc. è fissato dai disegni decorativi che fanno risaltare[44] le parti principali e caratteristiche. Già la fig. 21 dimostra una decorazione che pone in rilievo gli angoli uguali di un triangolo equilatero.
La fig. 22 pone in rilievo l'angolo retto, caratteristica del triangolo rettangolo e il diverso colore dei cateti (entrambi dello stesso colore) e della ipotenusa (di colore diverso) fa notare i caratteri dei lati.
Ogni bambino fa una collezione di costruzioni geometriche e decorative del triangolo - e le accompagna con dei cartelli sui quali scrive le definizioni, i nomi del tutto e quello delle parti e comincia a formare un album di geometria, che andrà crescendo poco a poco.

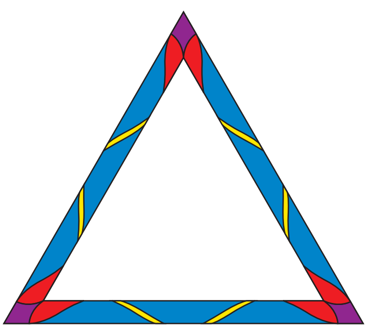


Figura 28 - la decorazione mette in rilievo il perimetro

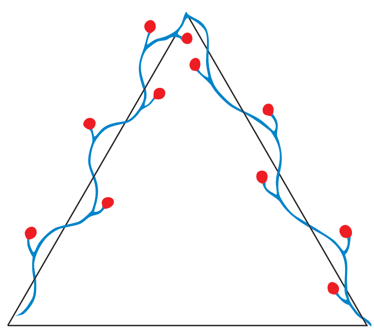


Figura 29 - la decorazione mette in rilievo i lati incidenti nel vertice[44]

[44] "Risultare" nel dattiloscritto.

[45] La didascalia manca sia nel dattiloscritto, sia nell'edizione a stampa.

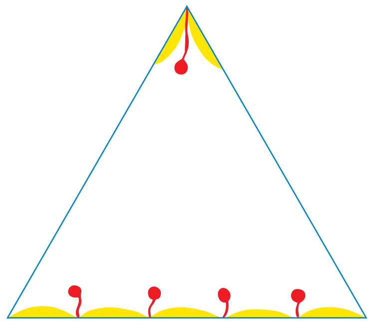


Figura 30 - la decorazione mette in rilievo la base e il vertice

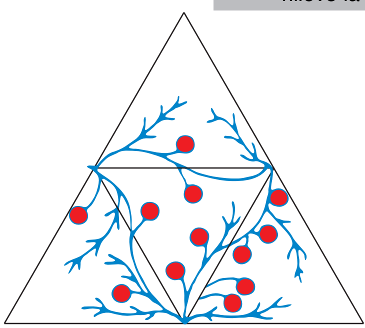


Figura 31 - decorazione dei congiungimenti dei punti medi dei lati[45]

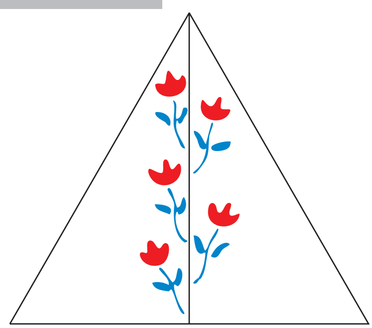


Figura 32 - decorazione dell'altezza

Il quadrato

Il quadrato è una figura geometrica regolare limitata da quattro lati uguali tra di loro; gli angoli del quadrato sono pure quattro e sono tutti angoli retti.
Il quadrato ha dunque:
quattro lati uguali,
e quattro angoli retti.
Costruzione del quadrato.

[46] "Mediane" nel dattiloscritto. La definizione di mediana non è stata ancora data. La definizione usuale di mediana, peraltro, è diversa da quella proposta dalla Montessori successivamente.

Tracciamo una linea, che sarà il lato su cui costruiamo il quadrato. Quel lato, intanto, sta per diventare:
la *base* del quadrato.
Aiutandoci con la squadra, eleviamo due linee perpendicolari agli estremi della base. Posta poi la punta del compasso a uno degli estremi, si prepari un'apertura di compasso uguale alla base: con questa misura e facendo centro ai due estremi, si tagliano le due perpendicolari a mezzo di un arco. Unendo i due punti così ricavati si completa il quadrato[47] (fig. 33).

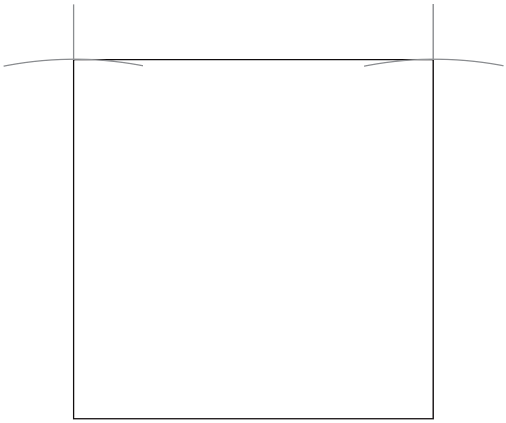


Figura 33

Il rettangolo

È pure una figura a quattro lati, e perciò, come il quadrato, un *quadrilatero* - Il rettangolo, dunque, è un quadrilatero regolare[48] che ha i quattro angoli retti e i lati opposti a due a due uguali.

Il rettangolo segnato nella fig. 34 ha dunque uguali tra loro i lati di destra e sinistra, che sono i maggiori, e uguali tra loro gli altri due lati minori, che stanno in cima e in basso.

[47] La costruzione fa uso della squadra ma somiglia alla costruzione euclidea del quadrato, che precede, negli *Elementi*, il teorema di Pitagora.
[48] Usualmente la nomenclatura è leggermente diversa, in quanto per i poligoni la parola "regolare" si riferisce a figure con tutti i lati e tutti gli angoli uguali. L'autrice probabilmente si riferisce al fatto che nel rettangolo gli angoli sono tutti uguali.

Il lato del rettangolo che sta in basso sarebbe in questo caso: la *base* del rettangolo.

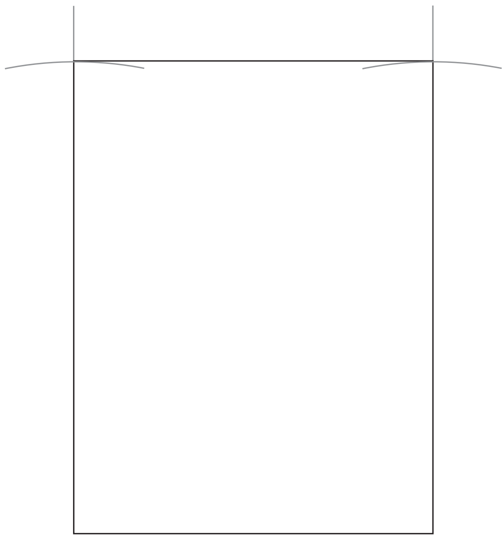


Figura 34

Il rombo

Il rombo è un quadrilatero che ha tutti e quattro i lati uguali, come nel quadrato. Gli angoli però sono diversi: come se un quadrato fosse stato tirato dai due angoli opposti. Questi due angoli opposti sono acuti e gli altri due, che sono a loro volta opposti, sono ottusi. Così che il rombo è un quadrilatero che ha tuti i lati uguali, e gli angoli opposti uguali a due a due.

Costruzione del rombo:
Si traccia prima una linea che serve di base e quindi un'altra linea obliqua, all'estremo di essa, della stessa lunghezza della prima. Si forma così un angolo fatto di due linee di uguale lunghezza, che già rappresentano due dei lati del rombo. Si prepara quindi il compasso dandogli un'apertura uguale al lato e puntandolo successivamente ai due estremi liberi dei lati del rombo, si descrivono due archi i quali si incontrano in un punto. Unendo questo punto agli estremi dei lati già disegnati, si ottiene il rombo (fig. 35).

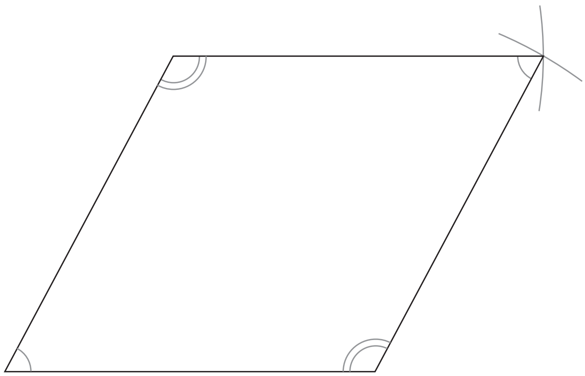


Figura 35

Il romboide

Il romboide è un quadrilatero che ha i lati uguali a due a due, e gli angoli opposti uguali a due a due.
Esso corrisponde a un rettangolo (storto, tirato per gli angoli) come il rombo corrispondeva al quadrato.

Costruzione del romboide.
Si disegna prima un angolo, con due linee di lunghezza diseguale: poi si punta all'estremo del lato maggiore il compasso con l'apertura uguale al lato minore e si descrive un arco; si punta quindi all'estremo del lato minore il compasso con l'apertura uguale al lato maggiore e si descrive un altro arco, che si incontra col primo in un punto.
Unendo questo punto agli estremi dell'angolo a mezzo di due linee, viene costruito il romboide (Fig. 36).

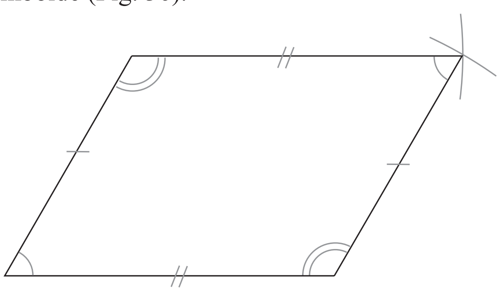


Figura 36

Lati paralleli

Tutte queste figure quadrilatere: quadrato, rettangolo, rombo, romboide, hanno un carattere comune, che è quello di avere i lati opposti paralleli. Questi lati cioè sono a uguale distanza l'uno dall'altro e prolugati all'infinito non si incontrerebbero mai (fig. 37).

Figura 37

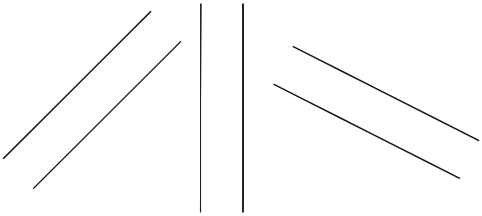


Figura 38

Due linee per essere parallele basta che siano ugualmente distanti l'una dall'altra, possono però avere tutte le direzioni possibili (fig. 38).

Quindi delle parallele possono incontrarsi con altre parallele diversamente distanti tra loro e anche in direzione perpendicolare od obliqua (fig. 39).

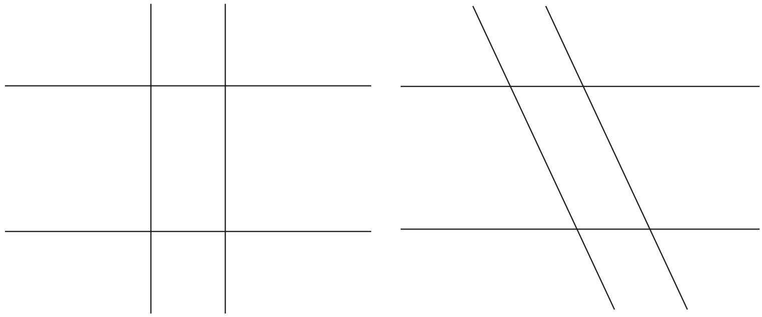


Figura 39

E questo si trova sui quadrilateri che abbiamo costruito: essi hanno i lati opposti paralleli.

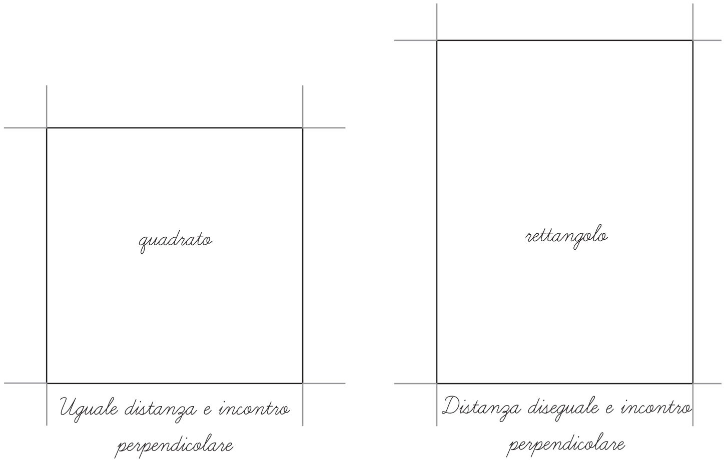


Figura 40

Si possono applicare queste nozioni agli incastri piani e alle tre serie dei cartelli. Mentre c'è un solo quadrato, i rettangoli possono essere di diverse forme, più larghi e più stretti, secondo la proporzione reciproca dei loro lati maggiori e minori.

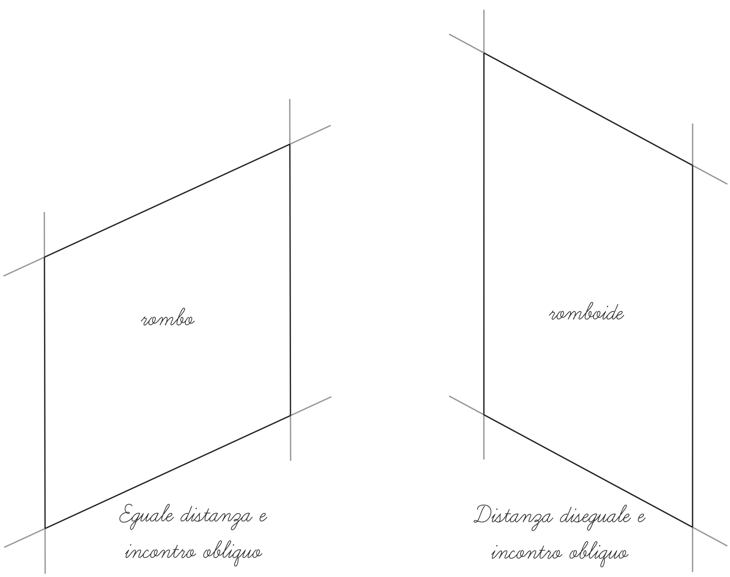


Figura 41

Il trapezio

Il trapezio isoscele[49] è un quadrilatero che ha soltanto due lati paralleli: e gli altri due lati sono ugualmente inclinati sulla base e perciò formano due angoli uguali con essa: - anche incontrandosi con l'altro lato formano due angoli tra loro uguali, mentre però quelli alla base sono acuti, gli altri sono ottusi (fig. 42).

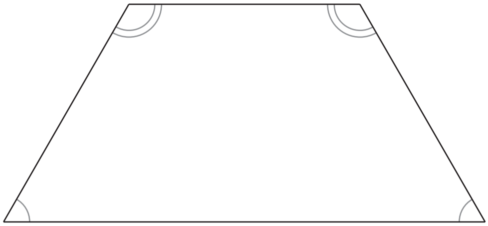


Figura 42

I lati paralleli del trapezio isoscele hanno lunghezza diseguale: mentre quelli non paralleli sono di uguale lunghezza.
Nel trapezio tutti e due i lati paralleli si chiamano: *basi del trapezio* (fig.43).

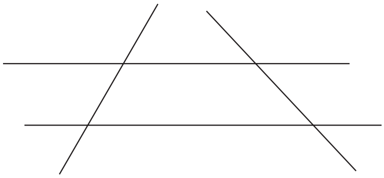
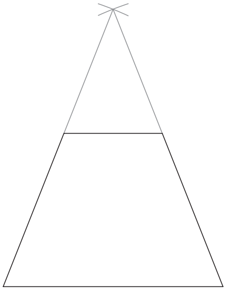


Figura 43 - due parallele che s'incontrano con due oblique convergenti formando un trapezio scaleno[50]



Costruzione del trapezio. Per costruire un trapezio isoscele, costruiremo prima un triangolo isoscele e poi lo taglieremo trasversalmente, con una linea parallela alla base del triangolo (fig. 44).

Figura 44

[49] La parola "isoscele" qui e nel seguito non compare nel dattiloscritto e nell'edizione spagnola.
[50] La figura, e soprattutto la didascalia, in cui manca "formando un trapezio scaleno", sono nel contesto poco chiare, dato che nel prosieguo del testo si continua a parlare del trapezio isoscele, e che il trapezio scaleno disegnato nella figura non viene successivamente definito. Nell'edizione spagnola compare solo una figura analoga a quella del dattiloscritto, senza didascalia.

Il trapezio rettangolo[51]

Il *trapezio rettangolo* è un trapezio irregolare: una delle irregolarità consiste nell’avere uno degli angoli di base retto (fig. 45).

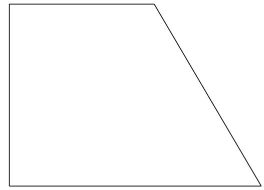
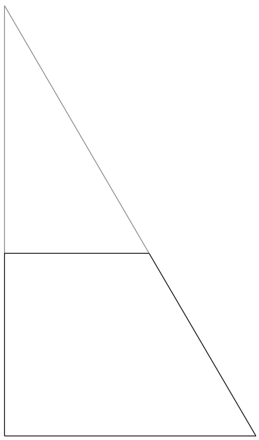


Figura 45

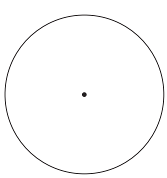


Costruzione del trapezio rettangolo.
Per costruire il trapezio rettangolo tagliare trasversalmente, con una linea parallela alla base, un triangolo rettangolo (fig. 46).

Figura 46

Il circolo

Se si punta il compasso e si fa compiere al lapis scrivente un intero giro, resta disegnato un circolo. Due cose risultano in questa facile costruzione: il punto in cui si punta il compasso, che è il *centro* del circolo (fig. 47), perché tutta la linea del circolo è egualmente distante da questo punto: e la larghezza dell’apertura del compasso quando ha disegnato il circolo, perché quell’apertura rappresenta la distanza lineare dal centro a ogni punto del circolo[52] (fig. 48).



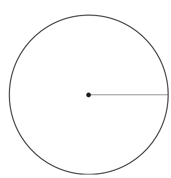


Figure 47 e 48

[51] Qui e nel seguito si legge nel dattiloscritto e nell’edizione a stampa “trapezoide” invece che trapezio rettangolo.

[52] In modo molto operativo la Montessori sta qui presentando, all’inizio della trattazione del circolo, il terzo assioma degli *Elementi* di Euclide che lo riguarda: “dato un punto *P* e un segmento *r* si può costruire un cerchio con centro *P* e raggio *r*”.

Ora la linea circolare (il circolo disegnato) si chiama *circonferenza* del circolo.
La linea che rappresenta la distanza dal centro alla circonferenza si chiama *raggio* del circolo.
Il punto centrale si chiama *centro* del circolo.
Ora dobbiamo considerare ancora la linea che attraversa tutto il circolo passando attraverso il centro: essa è lunga il doppio del raggio e si chiama: *diametro* del circolo (fig. 49).

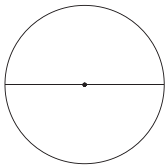


Figura 49

Il circolo è una figura chiusa *da un linea curva equidistante dal centro*.
La linea che segna il circolo è una linea curva, mentre le linee considerate prima erano rette.
Consideriamo dunque le linee secondo la loro distinzione[53] in rette (diritte - fig. 50) e curve (fig. 51).

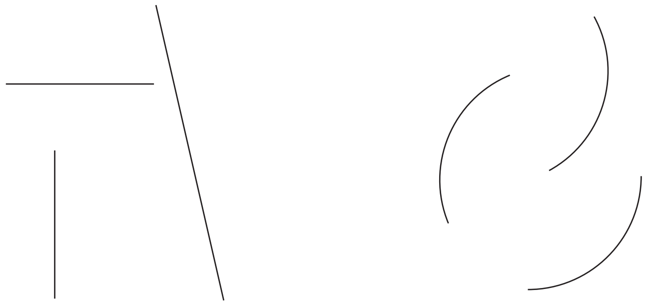


Figure 50 e 51

Lo studio del circolo:
circonferenza,
centro,
raggio,
diametro,
si fa a mezzo di costruzioni geometriche, disegni decorativi delle parti suddette e infine col riprendere gli incastri piani e i cartelli.

[53] "Costruzione" nel dattiloscritto; si tratta probabilmente di un errore del dattilografo. L'edizione spagnola traduce la frase in modo leggermente diverso.

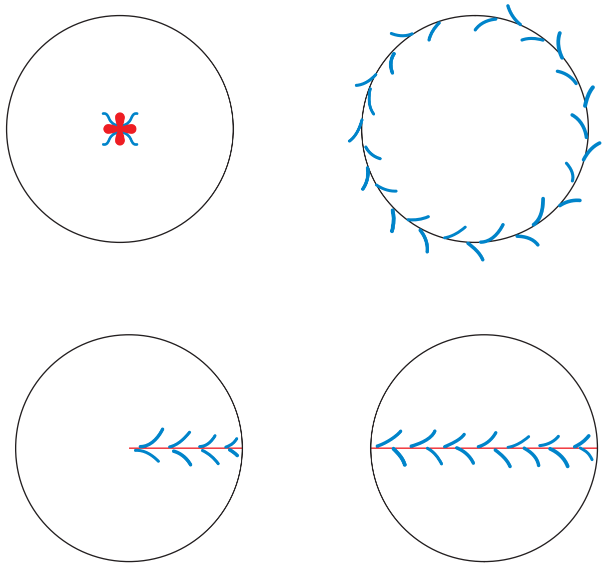


Figura 52- figure di decorazioni

Esagono

L'esagono è una figura regolare[54], chiusa da sei lati.
L'esagono ha sei angoli ottusi.

Costruzione dell'esagono.
Per costruire un esagono bisogna tracciare un circolo: e lasciando la stessa larghezza (cioè quella del raggio) prendere misure successive sulla circonferenza, puntando il compasso in un punto qualunque di essa, segnando con un arco un punto sulla circonferenza stessa, quindi posando qui il compasso, e via, perché i lati dell'esagono sono uguali al raggio (fig. 53).

[54] Esistono, ovviamente, anche esagoni non regolari, ma qui e nel seguito la Montessori considera solo poligoni regolari.

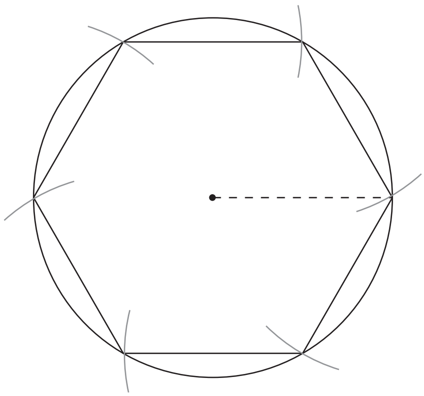


Figura 53

Se dunque si disegnano i raggi, risultano sei triangoli uguali, che sono equilateri, perché tutti i lati sono uguali al raggio del circolo (fig. 54).

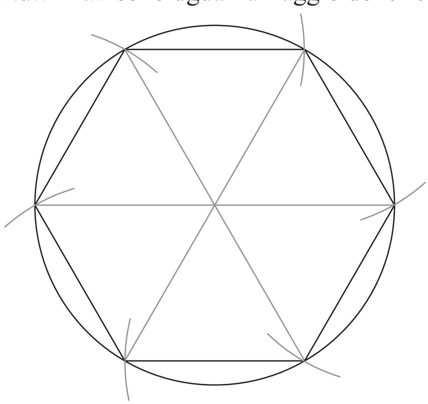


Figura 54

Poligoni

Una figura costituita da molti lati si chiama *poligono*. L'esagono è dunque un poligono di sei lati.
Sono poligoni anche:
il pentagono - che ha cinque lati.
L'ettagono - che ha sette lati.

L'ottagono - che ha otto lati.
L'ennagono - che ha nove lati.
Il decagono - che ha dieci lati.
L'insieme delle linee che formano il contorno di un poligono si chiama: *perimetro*.
Le varie linee che lo costruiscono si chiamano *lati* del poligono: i lati dell'esagono, dell'ettagono, del decagono, ecc.

Costruzione e decorazione dell'esagono, e studio dei poligoni tornando al materiale degli incastri piani[55].

Le parole

Dagli studi fatti, si sono acquistate molte parole nuove, che si riferiscono a concetti definiti.
È dunque bene di riunire insieme queste parole, sia classificandole secondo le idee che rappresentano, sia distribuendole secondo l'ordine alfabetico.
Si vengono così a compiere due lavori diversi: un libro di geometria e un vocabolario relativo alla geometria.
Il libro o album di geometria, può riunire pure i disegni, le definizioni, ecc.
Invece il vocabolario è raccolto sotto forma di rubrica.
Ecco la lista delle parole fin qui spiegate, secondo l'ordine delle idee che rappresentano (lista A) e secondo l'ordine alfabetico (lista B)[56].

[55] Diversamente dal resto del capitolo, questo accenno ai poligoni e alla possibilità delle decorazioni geometriche sull'esagono non è corredata da figure.
[56] La lista deve riferirsi a una versione differente del manoscritto, perché vi sono menzionate alcune voci (in particolare alterni, bisettrice, complementari, corda, equivalente, goniometro, grado e opposti al vertice) che si riferiscono quasi tutte agli angoli e che saranno definite molto oltre.

Lista A

Linea	retta	Pentagono
	curva	
	perpendicolare	Esagono
	obliqua	
	parallela	Ettagono
	convergente	
	divergente	Ottagono
Angolo	retto	Ennagono
	acuto	
	ottuso	Decagono
Triangolo	equilatero	Poligono
	isoscele	
	scaleno	Circolo
	equiangolo	
	rettangolo	Circonferenza
	ottusangolo	
	acutangolo	Perimetro
Quadrato		
		Lato
Rettangolo		
		Centro
Rombo		
		Raggio
Romboide		
		Diametro
Trapezio		
		Base
Trapezioide		
		Vertice

Lista B

A
- acuto
- alterni
- altezza
- angolo
- arco

B
- base
- bisettrice

C
- centro
- circolo
- circonferenza
- compasso
- complementari
- convergente
- corda
- curva

D
- decagono
- diagonale
- diametro
- divergente

E
- ennagono
- equiangolo
- equilatero
- equivalente
- esagono
- ettagono

G
- goniometro
- grado

I
- isoscele

L
- lato

M
- mediana

O
- obliqua
- opposti (al vertice)
- ottagono
- ottusangolo
- ottuso

P
- parallela
- pentagono
- perimetro
- perpendicolare
- poligono

Q
- quadrato

R
- raggio
- retta
- rettangolo (quadrilatero)
- rettangolo, triangolo
- retto
- riga
- rombo
- romboide

2. Introduzione al periodo elementare[57]

Questo breve capitolo contiene un'introduzione pedagogica molto efficace sull'idea della scoperta come motore dell'interesse nel processo pedagogico. Vengono poi descritti in un certo dettaglio i materiali avanzati per la scuola elementare e vengono introdotti alcuni termini necessari alla trattazione successiva. Il testo presenta in vari punti frasi evidentemente male interpretate dal dattilografo, di cui è proposta di volta in volta una ricostruzione possibile. Da un punto di vista editoriale si ribadisce la definizione decisamente inusuale di mediana, che qui è stata modificata.

L'insieme di esercizi fatti fino a questo punto sono preliminari a un periodo più avanzato di progresso del periodo elementare. Infatti nel primo periodo elementare, con lo studio analitico delle figure, con l'inizio di un linguaggio scientifico preciso nelle definizioni, si sono ricavati elementi indispensabili, termini necessari di espressione, senza i quali non sarebbe possibile procedere. Il successivo cammino è condotto da ragionamenti sui rapporti tra le figure e il linguaggio che dovrà corrispondervi sarà relativo all'enunciato[58] di problemi e di teoremi. Ciò che stiamo per esporre non è uno studio sistematico elementare di geometria. Noi offriamo soltanto dei mezzi per *preparare la mente* a uno studio sistematico. Questi mezzi (il materiale avanzato della geometria) sono quasi una palestra per la mente, che in un modo evidente, può trovare dei rapporti e fare quindi non solo delle ricerche e delle constatazioni, ma anche delle scoperte. La scoperta di rapporti è certo la cosa più atta a suscitare vivo interesse. Il teorema non è in sé interessante per un fanciullo che lo sente enunciare senza capirlo e senza poterne apprezzare le finalità e che deve affaticare la mente a studiare la risoluzione che gli vien data. Invece scoprire da sé - un rapporto - e impiantare un teorema; possedere le parole per determinarlo in forma

[57] Il titolo della sezione nel dattiloscritto è "Il quadrato" che è assolutamente slegato dal contesto. Nell'edizione spagnola il titolo è stato modificato come indicato. La modifica non convince completamente: i materiali e le attività introdotte nella sezione "Studio differenziale dei contorni" sono relativi al periodo elementare (v. pag. 8). Un titolo più pertinente potrebbe essere "Studio avanzato della geometria".

[58] "Annunciato" nel dattiloscritto.

corretta - è cosa veramente capace di esaltare lo spirito.
Basta anche una sola di queste scoperte per aprire alla mente una via brillante e insospettata. Allora l'interesse è nato - e quando esiste l'interesse, sono assicurate indefinite conquiste.
Noi dunque non diamo un materiale per dimostrare in modo chiaro e concreto, ciò che si insegna in modo astratto nelle scuole comuni. Noi offriamo soltanto, con oggetti materiali, delle figure geometriche che stanno in rapporto tra loro: figure spostabili e maneggevoli, tali cioè da prestarsi a dimostrare o *rivelare* col loro avvicinamento, coi confronti dell'una con l'altra delle evidenti corrispondenze. Ciò stimola alla intima attività dello spirito - perché l'occhio vede e la mente intuisce cose che un maestro non saprebbe trasmettere a una mente immatura che non si trovasse in uno stato di vivace attività.
Diviene così possibile un lavoro mentale che sembra prematuro, superiore alla età infantile.
Ma se si pensa che sono complicati i ragionamenti astratti e cavillosi sulle cose e non le cose stesse materialmente osservate, si può subito comprendere che una strada diversa dalla solita può aprire allo studio elementare della geometria dei progressi imprevedibili.
Il lavoro superiore della mente parte dalla periferia materiale ed evidente[59]. Constatate[60] per forza di cose le verità - *allora* comincia su esse un lavoro mentale ragionante e logico, che può ben presto spaziare nei campi dell'astrazione.
Non fu dalle[61] *cose*, che i primi geometri trassero le loro conoscenze? Non furono corrispondenze e relazioni tra cose, che stimolarono qualche mente attiva e interessata a formulare degli assiomi e quindi dei teoremi?
Come trasse fuori Pitagora il suo famoso teorema, che infinite generazioni si contentarono di prendere da lui per applicare, come chi spende una eredità ricevuta?
Difficile a comprendere è la soluzione di quel teorema, per la maggior parte degli scolari; perché la loro mente è passiva e chiusa. Ma chi sa che fosse invece possibile *intuirlo* come fece Pitagora stesso, ove la mente fosse aperta e carica[62].

---

[59] La traduzione spagnola riporta "Che il lavoro superiore della mente parta dalla periferia materiale è evidente". La frase del dattiloscritto è involuta, ma sembra, nel contesto, che la parola evidente si riferisca alle percezioni periferiche. Anche la traduzione spagnola, comunque, mantiene il senso delle frasi seguenti.
[60] Il dattiloscritto sembra riportare "constato" ma è quasi illeggibile e corretto a mano. La traduzione spagnola è piuttosto libera.
[61] "Delle" nel dattiloscritto.
[62] Testo certamente corrotto e parzialmente corretto a mano sul dattiloscritto. Il senso comun-

Ciò che noi facciamo è dunque di preparare delle *condizioni esteriori*, un *ambiente* che mette a contatto della *periferia* dell'individualità attiva, alcuni mezzi che il centro può utilizzare secondo le sue energie.
È l'offerta alla *periferia*, e non l'azione diretta sul centro, che caratterizza il nostro metodo, e lo differisce dagli altri. Invece cioè di ricorrere ai poteri di comprensione di ragionamento, e ai meccanismi mentali per trasmettere una *cosa fatta* nell'intelligenza dell'allievo: noi esponiamo alla sua *periferia* che sta in rapporto con l'ambiente dei *mezzi* che si prestano a un esercizio spontaneo della mente.
È così che le energie psichiche sono libere nella loro espansione: il fanciullo pensa e riflette secondo il suo potere naturale.
Oltre al *materiale* in se stesso noi abbiamo dato parole - vocaboli - e definizioni: - ma[63] solo in quantità appena sufficiente perché il[64] fanciullo possa esprimersi correttamente in *linguaggio scientifico* - quando abbia da esporre un teorema o un rapporto scoperto tra le cose.
Il *linguaggio preparato* è la via libera dell'espressione.
E in tal modo la coltura che si va assumendo, anziché produrre affaticamento, diviene un mezzo di sviluppo - che provoca una *ginnastica mentale*, rinforzante.
Dicevamo in principio che questo che andremo esponendo, non si riferisce al modo di fare *studiare sistematicamente la geometria*. Esso non è che una *ginnastica mentale* intorno alla geometria.
Essa prepara la mente ad *agire* più che a *ricevere*; e la anima con l'interesse che è sempre vivificante. La mente così preparata è resa attiva: - e quando sarà l'ora di ricevere (nelle scuole secondarie) un vero insegnamento sistematico della geometria, l'allievo sarà come un'intelligenza *che viene incontro* con vivo interesse, con singolare capacità di comprensione: e forse essa *darà* molto, oltre che prendere molto. Con vantaggio futuro anche della scienza.

Il materiale avanzato della geometria per le scuole elementari

Torniamo in questo periodo, a un materiale di ferro, che si presta quindi anche al disegno. Un materiale maneggevole e interessante è il mezzo periferico per indurre la mente a pensare, a riflettere lungamente, a ragionare

que è chiaro. La traduzione spagnola è molto simile.
[63] "Sia" nel dattiloscritto.
[64] "Al" nel dattiloscritto.

si potrebbe dire: *a meditare*.
Siamo abituati a far lavorare la mente, nelle scuole rette coi metodi comuni, indipendentemente dalla periferia. Siccome è necessario capire, ragionare - e ciò si fa solo col centro, noi crediamo di poter trattenere la *mente del bambino* sopra un'idea - sopra il nostro insegnamento.
Invece molte verità diventano evidenti - e *vengono su dalle cose* - guardando e riguardando, maneggiando e rimaneggiando.
Particolarità e corrispondenze che erano per lungo tempo passate inosservate, si fanno a un tratto chiare come una rivelazione e mandano uno sprazzo di luce nella coscienza. Le *scoperte*, appunto, sono fatte dall'uomo solo innanzi alle cose - dall'uomo che seppe mettersi in contatto con le cose - e queste, tutto ad un tratto, fanno vedere a *quella mente* - dei fatti che avevano sempre contenuto e che nessuno aveva veduto. È dunque di grandissima importanza preparare un oggetto eloquente nel suo muto contenuto - alla periferia della mente, per attaccarla con l'interesse all'oggetto[65].
L'eloquenza del muto oggetto sarà come un segreto rivelato *a chi vi proiettò*[66] *sopra delle energie* intellettuali.
Per giungere a questo risultato, il processo è diverso da quello comune: non è fissare il pensiero sopra un'idea: è rimaneggiare un oggetto, e perciò trattenerlo innanzi ai sensi, - farlo muovere con spostamenti continui, riprodurlo con immagini sensibili (disegni, pitture, lavori di carta, ecc.). La mente così si pone in contatto, e si trattiene sull'oggetto a mezzo della periferia: fino a che essa ne ricava tutto quanto l'oggetto può darci. La mano tocca l'evidenza, e la mente scopre il segreto.

Il primo materiale avanzato si fonda su tre figure soltanto: il triangolo equilatero, il quadrato e il circolo. Essi sono tra loro in rapporti dimensionali, perché il lato del triangolo, quello del quadrato, e il diametro[67] del circolo, sono di 10 cm di lunghezza.
Il circolo quindi è inscritto nel quadrato. Invece il triangolo deborda dal-circolo.
Noi porremo sovrapposte le tre figure che sono il centro e l'origine di tutto il materiale (fig. 55)

[65] Frase certamente corrotta e rimaneggiata a penna sul dattiloscritto. Il testo spagnolo traduce "per unirla con l'interesse a detto oggetto".
[66] "Progetto" nel dattiloscritto.
[67] "Lato" nel dattiloscritto.

Figura 55
le tre figure
geometriche

Le figure sono, come si è già accennato, di ferro e verniciate a colori. La figura ha una cornice quadrata, come quella già vista negli incastri piani e nelle figure per il primo disegno nei piccoli bambini. Soltanto qui non si ha solo una cornice, ma un sostegno: cioè il fondo della cornice non è vuoto come nei materiali primitivi (fig. 56). Il fondo e la parte esteriore ed elevata della cornice, hanno colori diversi: per esempio il fondo bianco, la cornice verde; invece la figura geometrica che va posta dentro è di un altro colore, per esempio rossa (fig 57).

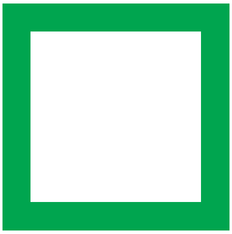


Figura 56
esempio di una cornice
col fondo

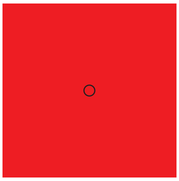


Figura 57
la figura geometrica corrispondente, da incastrare
(essa è munita di un bottone per il maneggio)

Il fondo della cornice ha un'importanza nuova in questo materiale: esso è quasi una costante di riferimento: l'unità in rapporto alle frazioni.
Infatti ognuna delle suddette figure va divisa e suddivisa: e le parti relative del tutto si raccolgono in cornici sempre uguali. Cosicché c'è per esempio il triangolo equilatero, altresì intero, anche diviso in due parti e poi in tre parti e quindi in quattro parti (fig. 58-61).

E le suddivisioni stanno a ricostruire il triangolo dentro una cornice uguale a quella del triangolo intero. Così ci sono quattro cornici eguali, col fondo rappresentante sempre lo stesso triangolo equilatero. Invece le figure da incastrare sono: due metà, tre terzi, quattro quarti del medesimo triangolo[68].

Figura 58 - il triangolo intero

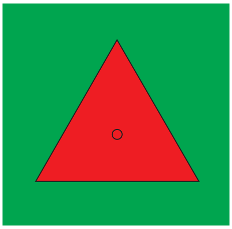
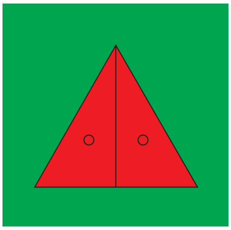


Figura 59 - il triangolo diviso in due parti



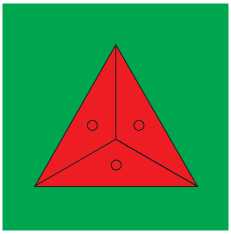


Figura 60 - il triangolo diviso in tre parti

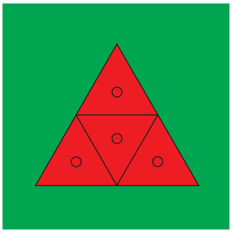


Figura 61 - il triangolo diviso in quattro parti

Il circolo è rappresentato dieci volte, essendo diviso in settori radiali, fino a dieci parti (fig. 62)[69].

[68] Manca l'indicazione dell'intero che, peraltro, è riportato in figura.
[69] Sia nel dattiloscritto che nella edizione a stampa le figure non sono coerenti con il testo e sono senza didascalie. Nell'edizione a stampa sono inoltre inserite nel testo in modo incoerente.

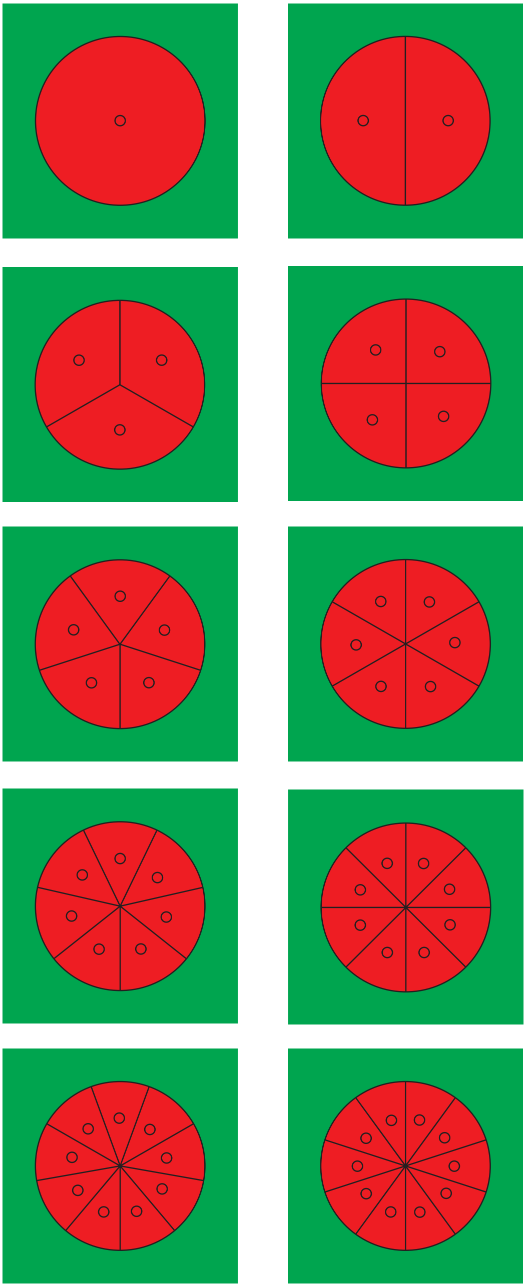


Figura 62

Il quadrato è intero e poi successivamente diviso in due, quattro, otto e sedici parti, in due serie cioè: a mezzo di diagonali, in triangoli sempre più piccoli; e a mezzo di mediane in forme quadrangolari: vi sono perciò nove cornici uguali, per contenere tutte quelle suddivisioni del quadrato (fig. 63)[70].

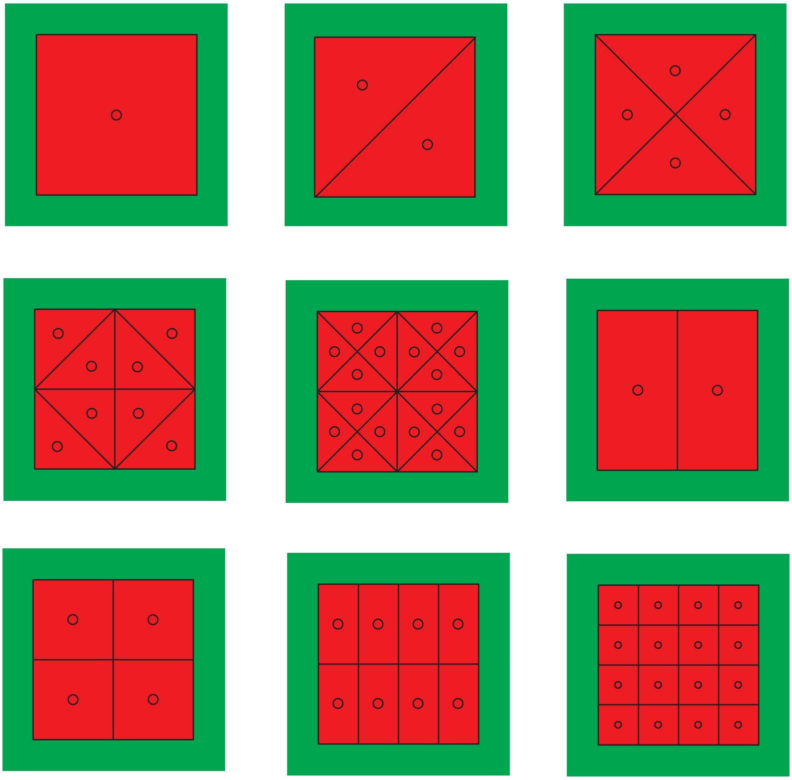


Figura 63

Oltre a queste figure il materiale ne presenta molte altre. Per esempio esso ha una serie di circoli minori di quello che rappresenta il punto di partenza. Essi non sono costruiti secondo una graduale decrescenza del diametro, come nel materiale degli incastri piani usati dai piccoli bambini.
Qui invece i circoli successivamente più piccoli, sono inscritti in figure determinate: nel triangolo equilatero, nella quarta parte del quadrato, nella

[70] Nel dattiloscritto e nella edizione a stampa queste figure mancano del tutto.

quarta parte del triangolo equilatero; ovvero il diametro è determinato da figure che provengono dalle suddivisioni prima descritte, come per esempio il cateto del triangolo rettangolo che è la quarta parte del quadrato diviso secondo le diagonali[71].
Ognuno di questi circoli ha la sua cornice: cosicché c'è una serie di cornici le quali, una volta spostata la figura, presentano un fondo bianco rappresentante circoli di differente diametro. Dentro questi circoli possono entrare delle figure, quadrati e triangoli, che in tal caso sono inscritti nel[72] circolo[73] (fig. 64)[74].

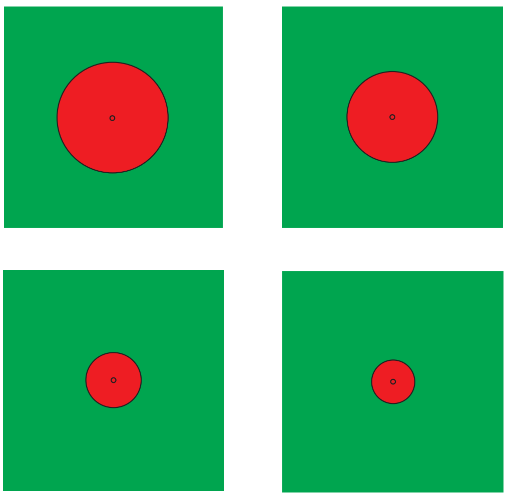


Figura 64

Basti accennare a questi soli materiali, per comprendere come essi si prestino a interessanti prove e confronti.

[71] I due punti all'inizio della frase mancano nel dattiloscritto. Questa omissione rende la frase oscura. La traduzione spagnola è dunque alquanto differente, e manca il riferimento alla quarta parte del quadrato e alla quarta parte del triangolo. Il materiale attualmente in produzione non è completo e, per alcuni incastri, l'operazione di inscrizione descritta nel testo è impossibile, perché i cerchi sono troppo grandi e mancano i triangoli.
[72] "In" nel dattiloscritto.
[73] La qualità della traduzione spagnola e delle figure in questo punto del testo è molto scadente e questo è forse il motivo per cui parte di questo materiale è andato perduto.
[74] Le figure mancano del tutto nel dattiloscritto, e sono poco comprensibili nell'edizione spagnola.

Qui vogliamo richiamare l'attenzione sul circolo diviso in parti: i cui settori, separabili, esattamente costruiti, e solidi nei contorni, si prestano alla misura degli angoli, e a uno studio oggettivo delle frazioni, perché i circoli fondamentali delle cornici (bianchi) possono essere riempiti da settori di varie dimensioni e tali prove e spostamenti danno luogo a una chiara intuizione sui calcoli delle proporzioni. Le valutazioni e misure degli angoli, poi, aiutano a studiare gli angoli delle figure geometriche, che si trovano nel[75] materiale.
Un'altra parte del materiale si sposta alquanto da questo - e si presta a ridurre molte e varie figure geometriche (come triangoli, rombi, trapezi, poligoni) - a un rettangolo equivalente - a mezzo di spostamenti, di somme e sottrazioni di figure; e in simili oggetti è possibile di ricavare la dimostrazione indiretta di alcuni teoremi come: tutti i triangoli che hanno la stessa base e la stessa altezza, sono equivalenti. Anche si trovano tra questa ultima parte del materiale varie dimostrazioni del teorema di Pitagora, che servono di guida a un ragionamento logico - si prestano quasi fossero[76] una traccia, a far *scrivere* in termini esatti, una dimostrazione veramente euclidea, come un componimento scritto di geometria.
Le numerose applicazioni di questi materiali, ci impongono un ordine nell'esposizione particolareggiata.
Ora questo ordine non significa che tutta una serie di esercizi che si verranno enumerando, debba precedere l'altra - che andiamo esponendo successivamente. Anzi spesso i vari rami si svolgono parallelamente.
Indicheremo qui il genere degli esercizi:
Uno è quello dello studio del materiale stesso; degli spostamenti delle figure nelle cornici, ecc.
Uno è costituito da lavori: disegni e pitture, riproduzioni fatte a mezzo di istrumenti come squadre, compassi, goniometri ecc. Lavori vari di rappresentazione delle figure a mezzo di carte colorate che si intagliano e si ingommano su cartoni[77].
Infine c'è un ulteriore sviluppo di arte decorativa, a cui le suddivisioni delle figure, le loro corrispondenze, la possibilità di combinare[78] molte

[75] "Sul" nel dattiloscritto.
[76] La frase è poco comprensibile nel dattiloscritto, perché la parola "fossero" manca. La ricostruzione proposta permette, conservando il riferimento alla "traccia", di preservare la bella immagine del "componimento scritto di geometria" che nella traduzione spagnola è stata omessa.
[77] La frase riguardante la rappresentazione in carta delle figure geometriche è omessa nell'edizione spagnola.
[78] "Continuare" nel dattiloscritto, su cui è riportata una correzione a penna. Anche l'edizione spagnola traduce "combinar".

figure inscritte e circoscritte - danno un materiale sufficiente a ricchissima creazione. Anche il maneggio del compasso ha dato luogo a creazioni artistiche e a lavori esatti e pazienti, che sorpassano la nostra immaginazione, e rivelano la ricchezza di energie ordinatrici esistenti nell'animo dei fanciulli.

Studio delle linee - definizioni

Triangolo

Se prendiamo il triangolo equilatero diviso in due parti, vediamo che ognuna di queste parti è un triangolo rettangolo (fig. 59)[79].

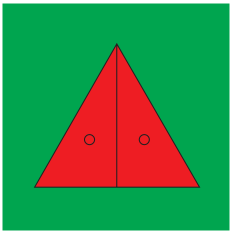


Figura 59

Quella linea, lungo la quale combaciano quando stanno uniti, va perpendicolarmente dal vertice alla base. Essa è l'*altezza* del triangolo. E siccome i due triangoli rettangoli sono uguali - anche la loro linea di base è uguale - ciascuna dunque è la metà del triangolo equilatero.
L'altezza del triangolo è quella linea che va perpendicolarmente dal vertice alla base - e segna sulla base due angoli retti. Nel triangolo equilatero, l'altezza divide la base in due parti uguali.

Adesso fermiamoci un poco sull'altezza. Se il triangolo non fosse di forma diritta e regolare l'altezza non cadrebbe nel centro della base, ma sarebbe sempre l'altezza del triangolo. Che cosa è dunque l'altezza?
L'altezza è la distanza dalla base (o dalla linea di direzione della base) al punto più alto della figura, e tale distanza si misura con una linea perpendicolare alla base. Facciamo qualche esempio.
Ecco un triangolo ottusangolo (fig. 65).

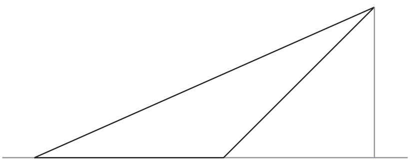


Figura 65

Esso ha una forma così irregolare che se dal vertice si abbassa una perpendicolare sulla base, cade molto al di fuori di essa. Tuttavia quella perpendicolare che va dal vertice alla linea di direzione della base è l'altezza del triangolo.

[79] Nel manoscritto la figura manca. Nell'edizione a stampa si è inserito il richiamo alla figura presentata all'inizio del capitolo.

Ora, supponiamo di avere una porta che ha il lato superiore spostabile, cioè che si può abbassare e sollevare. Ciò si fa perché tutti quelli che passano di lì, devono essere misurati. Passa un giovane e la porta si cala fino a toccare il vertice della testa. Passa un vecchio contadino curvo in modo che la sua testa è più bassa della schiena e la porta si cala fino a toccare il punto più alto della sua schiena. Quel livello segna per l'uno e per l'altro - l'altezza necessaria della porta per poter passare. La distanza è determinata da una linea perpendicolare tracciata fra la soglia e la parte alta della porta (punteggiata). A ben guardare l'altezza è, nel caso della porta, determinata da due linee parallele, la soglia, e il lato alto che è spostabile (fig. 66).

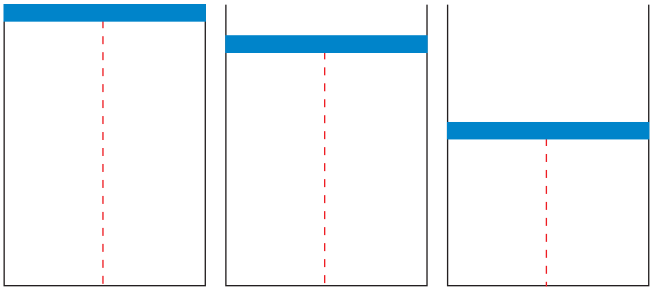


Figura 66

L'altezza è la perpendicolare tra quelle parallele.
Se prendiamo ora a osservare, con questo concetto, delle varie figure geometriche, contenute tra due parallele, diremo che esse hanno tutte la stessa altezza e l'altezza è determinata dalla distanza, in linea perpendicolare, tra le due parallele (fig. 67).

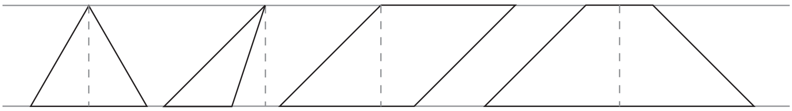
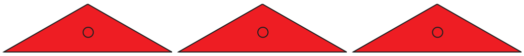


Figura 67

Ora torniamo ancora al triangolo equilatero - prendendo a considerare quello diviso in tre parti.
I tre triangoli uguali che risultano dalla divisione, sono triangoli ottusangoli e isosceli: perciò hanno gli altri due angoli, opposti a quello ottuso, uguali tra loro.



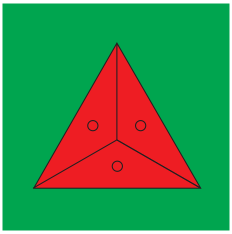


Figura 68

Rimettendo a posto nella cornice i tre triangoli, in modo da ricostruire il triangolo equilatero - si vedono le linee lungo le quali combaciano i tre triangoli ottusangoli. Essi si toccano lungo i lati uguali (fig. 68). I loro angoli acuti, che sono uguali tra loro, si trovano collocati a due a due dentro l'angolo del triangolo equilatero. Ognuno di essi è dunque la metà dell'angolo intero del triangolo grande. La linea (il lato dei triangoli contenuti nel[80] maggiore) divide dunque l'angolo del grande triangolo equilatero in due angoli uguali. Una linea che ha tale proprietà si chiama: *bisettrice*. Nel triangolo diviso in tre parti si vedono dunque le *tre bisettrici*. Esse sono uguali tra loro. E sono[81] nel centro del triangolo: è *centro* quel punto ugualmente distante dai tre vertici degli angoli: e può avere un centro[82], cioè un punto equidistante da tutti gli estremi, soltanto una figura regolare[83].

Bisettrice è dunque una linea che divide un angolo in due parti uguali.

Nel triangolo equilatero è facile costruirla, perché essa corrisponde alla direzione della altezza, e si trova riunendo il vertice col punto mediano del lato opposto.

In altri casi però occorre costruire in rapporto all'angolo stesso la bisettrice. Disegnato un angolo qualunque, occorre prima puntare il compasso sul *vertice* (punto d'incontro delle linee che formano l'angolo) e, con una breve e qualunque apertura, tracciare un arco che vada ad intersecare tutti e due i lati. Si punta quindi il compasso successivamente sui due punti d'intersezione, di un lato e dell'altro, e, con la medesima apertura (qualunque) si tracciano dentro lo spazio dell'angolo due archi che s'intersecano tra loro. Unendo quel punto d'intersezione, col vertice dell'angolo, si ha la bisettrice (fig. 69).

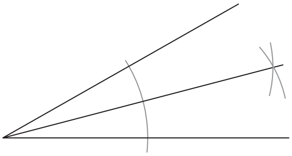


Figura 69
costruzione della bisettrice

[80] "Sul" nel dattiloscritto.

[81] Si tratta forse di un errore di battitura. L'edizione spagnola traduce "si uniscono". Il senso è comunque chiaro.

[82] "Cerchio" nel dattiloscritto. Il traduttore spagnolo rende diversamente tutta la frase.

[83] La frase non è felicissima. I tre centri del triangolo (baricentro, incentro, ortocentro) non saranno comunque trattati in seguito.

Tornando ora al materiale consideriamo il triangolo equilatero diviso in quattro parti (fig. 70).

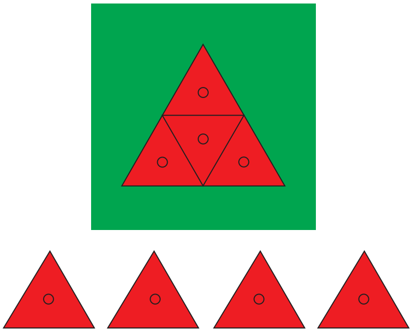


Figura 70

Togliendo dal posto i quattro piccoli triangoli, si possono sovrapporre e constatare che sono tutti uguali tra loro, non solo ma i loro lati sono pure tutti uguali. Essi sono dunque tutti triangoli equilateri e perciò equiangoli.

Infatti l'angolo di essi combacia perfettamente con l'angolo del triangolo grande, quando si ripongono nella cornice.

Il grande triangolo equilatero, è stato diviso dunque in quattro piccoli triangoli equilateri. Due lati dei piccoli, sono insieme uguali al lato del grande; sono quindi ciascuno la metà del lato del triangolo maggiore.

Il punto in cui i lati di due piccoli s'incontrano è il punto *centrale* o *medio* del lato del grande.

La divisione in quattro parti è dunque fatta da linee, che riuniscono i punti medi dei lati[84] (fig. 71).

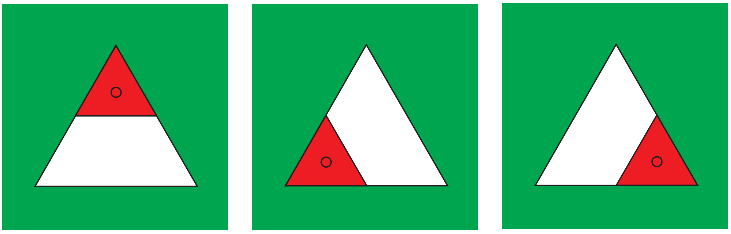


Figura 71

[84] Nel dattiloscritto si legge "che riuniscono i punti medi di due lati opposti. Le linee che hanno tale proprietà, cioè che uniscono i punti medi di due lati opposti, si chiamano *mediane*".

Modo di trovare il centro di una linea, a mezzo del compasso.
Avendo queste linee, come loro caratteristica[85], di unire i punti medi dei lati di una figura, impariamo a cercare il punto medio di una linea.
Sia data[86] una linea retta: per cercare il suo punto medio, si punta il compasso a uno dei suoi estremi, e, con una qualunque apertura sufficiente, si descrive un arco di cerchio al di sopra e al di sotto della linea stessa. Poi puntando il compasso all'altro estremo, si tracciano archi di cerchio che intersecano i primi. Risultano così due punti uno al di sotto e l'altro al di sopra della linea. Unendo quei due punti - con una retta, questa interseca la linea data nel suo punto medio (fig. 72).

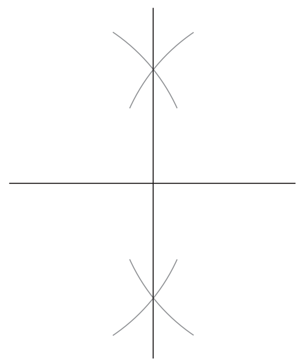


Figura 72

QUADRATO[87]
Andiamo ora a osservare il quadrato.
Il quadrato è prima diviso in due parti - poi ancora ognuna è divisa in due e così di seguito: in modo che il quadrato stesso resti successivamente diviso: in due, in quattro, otto e sedici parti. Però le divisioni sono fatte in due modi: in una serie il quadrato resta suddiviso sempre in triangoli; nell'altra serie, invece, sempre in quadrilateri.
Consideriamo prima il quadrato diviso in due triangoli (fig. 73).

[85] "Avendo la mediana, come sua caratteristica," nel dattiloscritto.
[86] "Data" manca nel dattiloscritto (in cui si suggerisce, a penna, di inserire un simbolo R per indicare la linea retta) e nella traduzione spagnola.
[87] Questo titolo manca nel dattiloscritto e anche nell'indice proposto da Mario Montessori nel dattiloscritto del 1954.

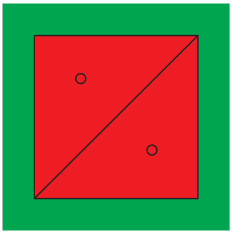


Figura 73

I due triangoli combaciano lungo una linea che, andando dal vertice di un angolo, a quello opposto, divide tutta la figura del quadrato. Tale linea si chiama *diagonale*.
Nel triangolo non poteva esserci una diagonale, perché la linea che va da un angolo all'altro è un lato, e non divide mai la figura: nel triangolo può esistere soltanto una bisettrice dell'angolo.

Il quadrato diviso in quattro triangoli dimostra, con l'unione dei lati di questi, due diagonali, cioè due linee che traversano il quadrato da un vertice all'altro vertice opposto (fig. 74).

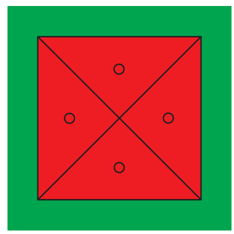


Figura 74

Cioè le due diagonali del quadrato, dividono questo in quattro triangoli uguali.
Le due diagonali s'incontrano nel punto centrale del quadrato. I triangoli infatti sono uguali tra loro, come si può constatare confrontandoli e sovrapponendoli.
Di più, essi sono rettangoli. Infatti si può sovrapporre l'angolo di ciascuno di essi, che rimane al centro, con l'angolo retto del quadrato: sono perfettamente combacianti.
Le due diagonali dunque s'incontrano perpendicolarmente l'una all'altra, perché formano angoli retti.

Osserviamo ora il quadrato suddiviso in quadrilateri (fig. 75).
La prima suddivisione dà luogo a due rettangoli tra loro uguali. La linea lungo cui combaciano all'interno i loro lati maggiori va dunque dal punto medio di un lato del quadrato al punto medio del suo lato opposto.
Tale linea è una *mediana* del quadrato.
Se si osserva il quadrato diviso in quattro parti, subito si vede che le quattro parti sono quattro quadrati minori (fig. 76).

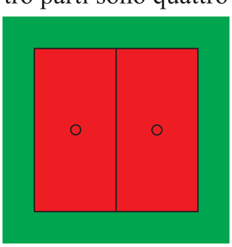
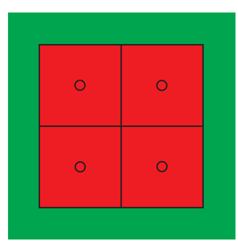


Figure 75 e 76



Essi, coi loro lati interni combacianti, dimostrano due linee che dividono tutto il quadrato da una parte all'altra, sono le due *mediane* che si incontrano ad angolo retto.
Queste cognizioni sono prese dal materiale, ma si devono fissare con vari lavori. Essi sono lavori di costruzione geometrica fatta con gl'istrumenti: lavori di ritaglio di carta colorata che s'ingommano riproducendo le grandi figure suddivise, e lavori di pittura con cui si colorano figure disegnate.
Infine ci sono anche i lavori di decorazione delle linee.
Ogni volta che si intaglia nella carta una figura, essa si taglia secondo quelle linee, così sulle linee si deve fissare l'attenzione quando si prepara una figura suddivisa per dipingerla. E finalmente è proprio alla linea che si rivolge il disegno decorativo atto a porla in rilievo tra le altre linee che costituiscono nell'insieme una figura.

Le parole

Riguardo al liguaggio, si è accumulata qualche altra definizione. E al vocabolario si è aggiunta qualche altra parola.

altezza	*mediana*
bisettrice	*diagonale*

3. Comparazione tra le figure - Il quadrato[88]

In questo capitolo la Montessori presenta una serie di esperienze relative al materiale sul quadrato, mostrando concretamente cosa intende per interazione fra la periferia, stimolata dalla manipolazione di materiale concreto, e il centro, capace di ragionamento astratto e di senso della scoperta.

Le parole assioma e teorema sono qui usate in un senso un po' diverso da quello che viene loro assegnato in matematica. Si intende qui che un assioma è una proposizione in qualche senso contenuta dall'oggetto geometrico, che ce la comunica con "muta eloquenza". Un teorema è invece una proposizione che richiede, per essere dimostrata, un ragionamento indipendente dalla struttura della figura stessa. In genere questi ragionamenti sono basati su scomposizioni e ricomposizioni di figure.

È però interessante notare che tutte le relazioni che vengono scoperte attraverso il materiale avanzato (tutti i teoremi, nella nomenclatura montessoriana) sono basate sull'invarianza del valore delle figure sottoposte a scomposizioni e ricomposizioni. Se consideriamo questo come l'assioma della geometria montessoriana, le relazioni presentate in Psicogeometria *possono essere considerate una coerente costruzione assiomatico-deduttiva.*

Un altro argomento sviluppato in questo capitolo per la prima volta è la possibilità di creare, attraverso le relazioni geometriche, delle figure decorative. Notare come queste figure ricordino il concetto di struttura autosimile, divenuto molto popolare nella letteratura matematica a partire dagli anni '80 con l'introduzione, da parte di B. Mandelbrot, degli oggetti frattali. Notare anche come la Montessori eviti di descrivere nel dettaglio il procedimento di costruzione delle figure, che sono evidentemente realizzate in cartoncino o in carta, giacché non si hanno abbastanza triangoli o quadrati per realizzarle con il materiale.

[88] Nel manoscritto le figure relative a questa parte del testo sono tutte riportate alla fine, e così sono state montate nell'edizione a stampa. Spesso, nel testo, i richiami alle figure sono sbagliati. Si propone qui un montaggio più omogeneo al testo.

Consideriamo ora le figure intere: lo spazio che esse occupano entro i loro limiti.
Infatti le figure sono estese e occupano uno spazio di determinata grandezza: chiamiamo questo spazio, questa "quantità di superficie", *valore* delle figure.
Esse poi sono limitate; e questi limiti che segnano pure i limiti del loro valore, determinano una *forma*.
Così tutti i pezzi, le figure geometriche degli incastri, hanno una estensione e una forma: quadrati, rettangoli, triangoli, circoli. Quel limite di ogni pezzo, è linea: ma la linea non esiste in sé: è il limite della figura.
Così quando il quadrato è diviso in due rettangoli eguali, si hanno in realtà due rettangoli. Messi vicino nella cornice si vedono divisi: noi diciamo che quella divisione è una linea, la mediana del quadrato: ma in verità non è che lo spazio tra i due rettangoli.
Così consideriamo la linea come una *astrazione* poiché la realtà della cosa è un *oggetto*[89].
Però disegnando i contorni di una figura, cioè tracciandone i limiti, dobbiamo sempre disegnare delle *linee di contorno*.
E quando tagliamo delle carte colorate che rappresentano le figure degli incastri, le dobbiamo tagliare secondo le *linee* del contorno.
Però è la figura che ora ci[90] interessa: il suo valore e soprattutto la sua *forma*.
Il quadrato è diviso in due rettangoli uguali, dunque ogni rettangolo è la metà del quadrato, come valore. Come forma il rettangolo è diverso dal quadrato[91]. I due rettangoli però sono uguali tra loro: si possono sovrapporre e si constata la loro identità: tutti gli angoli e tutti i lati si corrispondono. Il quadrato diviso in quattro parti, dà quattro quadrati più piccoli: ognuno di essi è la metà del rettangolo precedente, e ciò è evidente; e anche si può constatare (figg. 75 e 76).

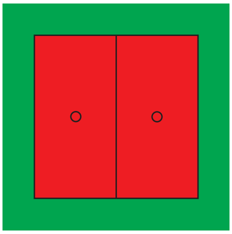


Figura 75

È risultata dunque la stessa forma del grande quadrato. I piccoli quadrati cioè hanno minor valore, ma la stessa forma del grande. Tutti gli angoli

[89] Il senso del testo è abbastanza chiaro: una linea è una astrazione, gli oggetti reali non sono descritti in termini di linee. Tuttavia il testo, come si vede dal seguito, è in molte parti corrotto.
[90] "S'interessa", corretto a mano nel dattiloscritto.
[91] "Come forma di rettangolo è diviso dal quadrato" nel dattiloscritto. Il traduttore spagnolo ha omesso la frase.

si corrispondono nel grande e nel piccolo: il lato poi del piccolo quadrato è la metà del lato di quello grande. Invece il suo valore è la quarta parte di esso.
Le figure che hanno diverso valore, ma la stessa forma, che cioè si somigliano, si chiamano figure *simili*.
Dobbiamo perciò distinguere le figure uguali dalle figure *simili*.

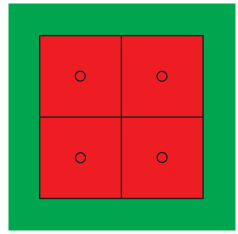


Figura 76

Se tiriamo fuori tutti i pezzi della suddivisione del quadrato in quadrilateri, si possono cercare e riunire tra loro prima le figure tutte *uguali* tra loro (fig. 77): poi le figure *simili* (figg. 78 e 79).

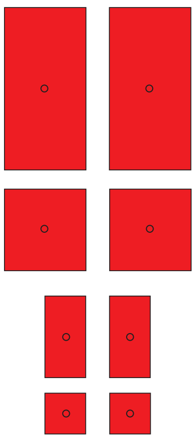


Figura 77
figure uguali

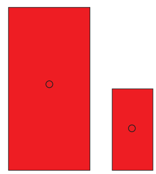


Figura 78
figure simili

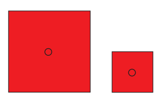


Figura 79
figure simili

Lo stesso si può ripetere col quadrato diviso secondo le diagonali. I due primi triangoli che ne risultano sono tra loro uguali - e il valore di ciascuno è la metà del quadrato (fig.73).
Con le due diagonali, si divide il quadrato in quattro triangoli che sono tutti uguali tra loro: e ciascuno di questi triangoli ha come valore la metà del triangolo precedente - cioè una quarta parte del quadrato (fig.74).
Così nelle successive suddivisioni, si hanno triangoli più piccoli, che sono la metà di quelli nella precedente serie.

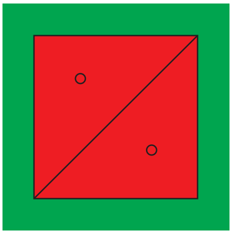


Figura 73

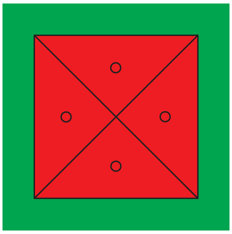


Figura 74

Ora guardiamo la forma di tutti questi triangoli (fig. 80).

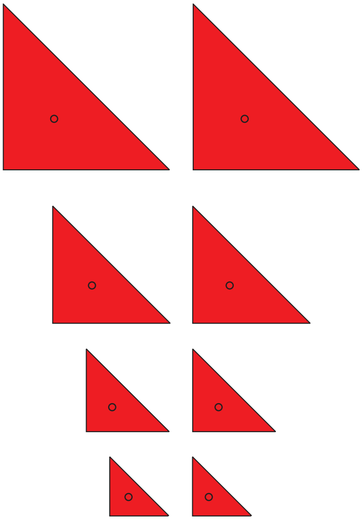


Figura 80 - figure uguali

Disponendoli nella stessa posizione, e in fila, appariscono tutti della stessa forma. Se si facesse una fotografia ingrandendo i minori fino a renderli della stessa dimensione del maggiore triangolo, diventerebbero identici (fig. 81).

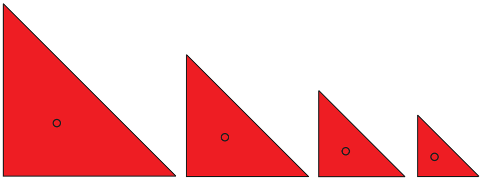


Figura 81 - figure simili

Non così avveniva per le suddivisioni del quadrato in forma quadrilatera: là veniva ora un rettangolo, ora un quadrato.
Vediamo ora la serie dei triangoli.
Sono somiglianti: ma quali sono i loro caratteri di somiglianza?
Basta sovrapporre il loro angolo maggiore per accorgersi che quell'angolo è uguale ed è retto: e può adattarsi agli angoli della cornice del quadrato.
Di più ognuno di quei triangoli ha i due lati adiacenti all'angolo retto cioè i due cateti uguali tra loro.
Possiamo dunque dire: quei triangoli hanno un angolo uguale e i lati adiacenti uguali tra loro: essi sono simili.
Ora è tempo di fare una considerazione sul valore delle figure.
Abbiamo[92] una serie di figure quadrangolari e triangolari che hanno una corrispondenza tra loro: il valore rispetto al quadrato, da cui derivano.

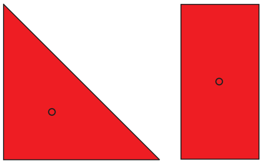


Figura 82
figure equivalenti

Il rettangolo grande che viene dalla prima suddivisione lungo una mediana, è metà del gran quadrato. E il triangolo che risulta dalla prima suddivisione secondo una diagonale è pure metà del quadrato. Esse dunque hanno lo stesso valore - benché siano di forme tanto diverse che senza questo ragionamento, non si troverebbe alcun rapporto tra loro (fig. 82).
I sensi ci direbbero solo che sono figure assolutamente diverse. È il ragionamento che ci fa capire indirettamente quanto sono invece vicine: esse sono uguali in valore: hanno la identica estensione. Le figure che essendo dissimili, hanno però lo stesso valore, si chiamano: *equivalenti* (e qui vuol dire uguale, cioè hanno uguale valore).
Questa *uguaglianza* che si ricava con il ragionamento, anziché con l'impressione dei sensi, anzi che è in contrasto con l'apparenza, ha un interesse particolare.
Perché quella della *equivalenza* è una ricerca che porta molte riflessioni; e non basta più *guardare* - *osservare* - per vederle, ma occorre ragionare per *scoprirle*.
Tiriamo fuori dunque tutte le parti contenute[93] nelle suddivisioni del quadrato e cerchiamo le *figure equivalenti*.
Quel triangolo che, nei suoi diversi valori ha sempre la stessa forma, ora è equivalente a un rettangolo, ora a un quadrato (fig.83).

[92] "La c'è" nel dattiloscritto.
[93] "Contenenti" nel dattiloscritto.

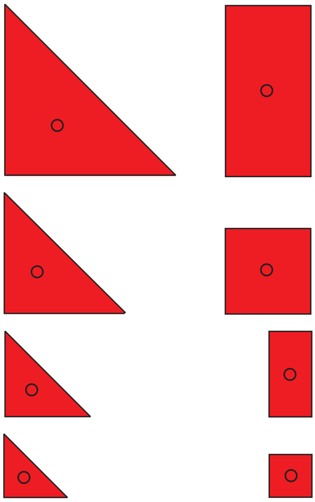


Figura 83 - figure equivalenti

Costruzione delle figure equivalenti

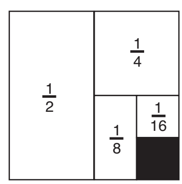


Figura 84

Adesso costruiremo le figure equivalenti nel modo seguente: si prendono due figure uguali al grande quadrato, in due fogli di carta a colori differenti: nell'uno disegneremo a rovescio la mediana e quindi, lasciando libero uno dei grandi rettangoli divideremo con una linea mediana l'altro rettangolo in due quadrati - uno di questi in due rettangoli - e uno di questi in due quadrati. Pel nostro uso rimane come avanzo un quadrato (sedicesima parte)(fig. 84).
Intagliando la carta lungo le linee disegnate, si ottengono quadrangoli che hanno rispettivamente il valore di 1/2, 1/4, 1/8, 1/16 del gran quadrato.
Prepariamo ora l'altro quadrato disegnando prima una diagonale; poi dividendo in due uno dei grandi triangoli; e così successivamente, lasciando sempre intatta una delle due figure uguali che di volta in volta risultano.
Rimane come avanzo un piccolo triangolo (fig.85).
Intagliando la carta lungo le linee disegnate, si ottengono dei triangoli che hanno rispettivamente il valore di 1/2, 1/4, 1/8, 1/16 del gran quadrato.

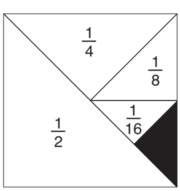


Figura 85

Ingommiamo adesso, una sotto l'altra le figure nel senso decrescente della dimensione: i triangoli da un lato, i quadrangoli dall'altro: ponendo a riscontro le figure equivalenti.
Si ha che ogni figura inferiore è uguale alla metà della figura immediatamente superiore; e ogni figura di destra è equivalente[94] a quella di sinistra (fig. 86).

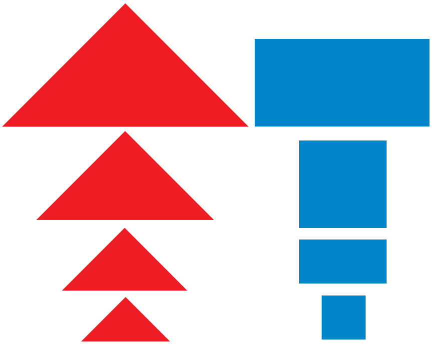


Figura 86

Varie sono le combinazioni possibili di costruzioni con tali figure. - I triangoli, si prestano a costruire una specie di pagoda cinese, se il piccolo triangolo si pone in alto; e in basso gli altri, successivamente, essendo l'uno il doppio del precedente (fig. 87)

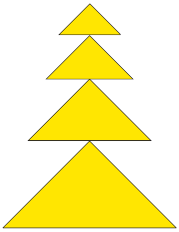


Figura 87

Non altrettanto si presta la serie dei quadrangoli. Occorrerebbe avere anche in questa serie tutti quadrati, se fossero uno la metà dell'altro. Ciò vuol dire che si presenta qui un problema. Come ottenere un quadrato che sia la metà di un altro? Dall'esercizio che si è fatto sulle figure equivalenti si è passati a un altro genere di lavoro. A mezzo cioè del concetto delle equivalenze, ci proponiamo una ricerca.

[94] "Coivalente" nel dattiloscritto.

Problemi e teoremi

Il modo più facile per risolvere questo problema è di ricorrere al materiale, e di cercare a mezzo di spostamenti delle figure mobili entro le cornici.
Prendiamo due triangoli che sono ciascuno 1/4 del quadrato, e avviciniamoli dal lato dell'ipotenusa: ecco un quadrato, che è uguale a due quarti e cioè alla metà del gran quadrato.
Il problema è risolto.
Mettiamo i due triangoli disposti a quadrato dentro la cornice del quadrato grande: esso vi entra esattamente: i suoi quattro vertici toccano i quattro punti medi dei lati del gran quadrato (fig. 88).
Quando una figura è contenuta in un'altra in modo che regolarmente la incontri da ogni parte opposta - essa si chiama, figura *inscritta*; e quella fuori, *circoscritta*.
I punti di contatto, permettono allora di mettere in rapporto definito le due figure.

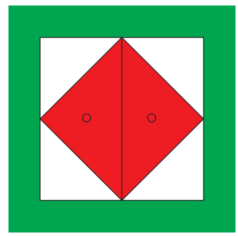


Figura 88

Se, in questo caso, il quadrato minore che sta all'interno avesse i lati disposti parallelamente al quadrato esterno, e a uguale distanza, come una cornice esso non sarebbe più *inscritto* - sarebbe invece *concentrico*, perché tutti i lati e gli angoli sarebbero ugualmente disposti attorno a un punto centrale.
Una figura concentrica non ha rapporti definiti con le altre - perché infinite potrebbero essere le figure concentriche una dentro l'altra.
Invece la figura inscritta è una sola e perciò determinata. Ci può essere solo un quadrato, che abbia i vertici toccanti il punto medio dei lati di un altro quadrato.
Cercando perciò di trovare il quadrato che sia la metà di un altro, abbiamo trovato un'altra cosa, che ci si rivela: abbiamo fatto una scoperta, cioè. E questa verità trovata si può comunicare agli altri, enunciando un teorema:

Teorema: se si hanno due quadrati, uno inscritto e l'altro circoscritto: il quadrato inscritto è uguale alla metà di quello circoscritto.

Osserviamo per quale corrispondenza di parti ciò è avvenuto. I triangoli che sono la quarta parte del gran quadrato, hanno come ipotenusa il lato di esso: osserviamo due triangoli opposti messi nella cornice: essi hanno allora i vertici che si toccano al centro del quadrato, e le ipotenuse che toccano i lati esterni (fig. 89).

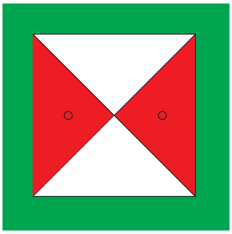


Figura 89

Spostandoli in modo da formare il quadrato inscritto, essi rivolgono invece i vertici verso la metà del lato del quadrato, e l'incontrano con le ipotenuse nel senso della mediana. La mediana del gran quadrato è dunque la diagonale del piccolo. Possiamo allora formulare un altro teorema nei seguenti termini.

Teorema: se un quadrato ha la diagonale uguale al lato di un altro quadrato, esso è equivalente alla metà di quest'ultimo.

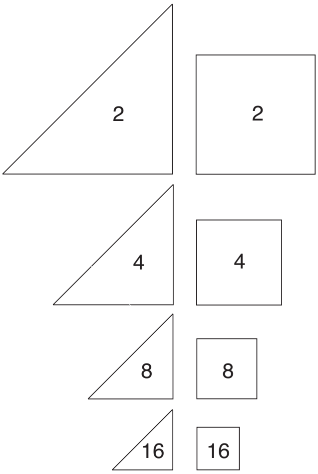


Figura 90

Per trovare il quadrato equivalente alla metà del gran quadrato, e sostituirlo quindi al rettangolo ottenuto con la mediana, occorre prendere due dei triangoli che valgono ciascuno la quarta parte del gran quadrato: e, mettendoli uniti secondo l'ipotenusa, costruire il quadrato.
Così si può fare per trovare un quadrato, invece del rettangolo che rappresenta l'ottava parte. Si prenderanno in tal[95] caso due triangoli che valgono 1/16 - e si uniranno[96] per l'ipotenusa.
Così possiamo ora mettere in prospetto dei triangoli e dei quadrati, cioè tutte figure tra loro simili - e che si equivalgono.
Per meglio indicarle, le segneremo con un numero (fig. 90).
Così dal[97] numero di triangoli che entrano nel gran quadrato - si hanno dei triangoli nº: 2, 4, 8, 16 e con gli stessi numeri, notiamo i quadrati rispettivamente equivalenti, quadrati 2, 4, 8, 16. Per costruire il quadrato 2, occorrono due triangoli 4, per costruire il quadrato 4, occorrono due triangoli 8, per costruire il quadrato 8, occorrono due triangoli 16.

[95] "Un sol" nel dattiloscritto.
[96] "Uniscono" nel dattiloscritto.
[97] Nel dattiloscritto la parola "Così" è cancellata e sostituita a penna con "Cioè", e si legge "col" al posto di "dal". Nella traduzione spagnola la frase è tradotta in modo diverso.

Ogni quadrato ha il lato eguale al cateto del triangolo inferiore: e, per meglio vedere questa corrispondenza, porremo le figure di prospetto secondo il lato anziché secondo il valore (fig. 91).

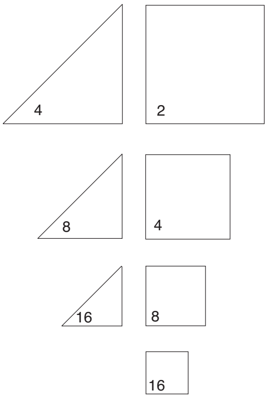
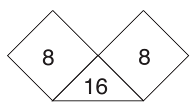


Figura 91

Questa corrispondenza ci suggerisce una costruzione: fare due quadrati uguali e metterli sui cateti del triangolo inferiore: p. es. due quadrati 8 disposti sul triangolo 16 (fig. 92).
Ora la somma di quei due quadrati (che sono i quadrati 8) è equivalente al quadrato superiore: 4.
Guardiamo che cosa ha esso di comune col triangolo 16. Il triangolo 16 ha l'ipotenusa uguale al lato del quadrato 4, come pure l'ha uguale al cateto del triangolo 8. Il quadrato 4 si può mettere dunque contro l'ipotensa del triangolo 16[98] (fig. 93).



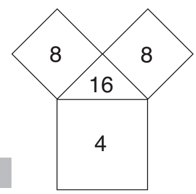


Figura 92 - 93

Avendo varie figure, si può combinare la stessa costruzione rispetto agli altri triangoli: 8 e 4. Intorno ai cateti del triangolo 8 si possono adattare due quadrati 4 - e, nell'ipotenusa, il quadrato 2.
Mentre due quadrati 2 si adattano ai cateti del triangolo 4, alla cui ipotenusa corrisponde il grande quadrato 1.
Se ciò si ripete in vari casi, possiamo dunque stabilire il fatto come costante ed annunciarlo sotto forma di teorema.

Teorema: in un triangolo rettangolo isoscele, la somma dei due quadrati costruiti sui cateti è equivalente al quadrato costruito sull'ipotenusa.

Lo studio sulle costatazioni di corrispondenza che esistono tra le figure equivalenti - si può fare maneggiando tutti quei triangoli simili, e tutti quei quadrati, che hanno valori determinati.
Come indica il quadro della fig. 91, ogni ipotenusa del triangolo inferiore è uguale al cateto del triangolo superiore e questa eguaglianza è evidente

[98] Qui è riportata una aggiunta a penna, con calligrafia diversa da quella della Montessori: "Anche un'altra corrispondenza di lati esiste. Cioè l'ipotenusa di ogni triangolo". Questa frase viene ignorata anche dal traduttore spagnolo.

adagiando il triangolo secondo tale corrispondenza.
E una volta constatata questa corrispondenza costante fra triangoli che sono uno la metà dell'altro - si può continuare la costruzione: si vede allora che si arriva con un triangolo piccolo, a toccare il primo triangolo grande. Un ciclo è finito. Ed è finito in modo esatto. Sono occorsi a ciò sette triangoli. È risultato un punto centrale attorno al quale tutti i triangoli girano a chiocciola (fig. 94).

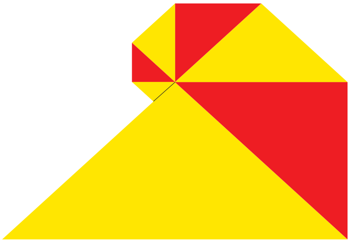


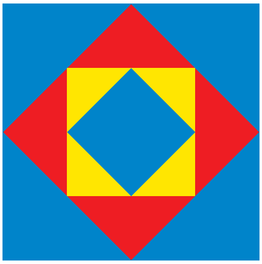
Figura 94

C'è l'angolo retto del triangolo grande, e poi gli angoli acuti di tutti gli altri.
Sappiamo già che quegli angoli acuti, benché appartenenti a figure di valore tanto diverso, sono però uguali fra loro; infatti ognuno di quegli angoli è metà di un angolo retto, perché appartengono alle suddivisioni di un quadrato, a mezzo delle diagonali, che sono anche bisettrici dell'angolo retto del quadrato.
Attorno a quel punto c'è dunque un angolo retto, più sei[99] mezzi retti; cioè un retto più tre retti: in tutto quattro retti. Infatti, osservando, risulta come due angoli adiacenti formino un angolo retto.
Le linee dei due cateti del gran triangolo, si continuano in linea retta con altri lati dei triangoli, che girano a chiocciola attorno ad un punto centrale, e fanno con essi una croce, disegnando quattro angoli retti.

Anche i quadrati tra loro hanno delle corrispondenze: il lato del quadrato superiore, corrisponde alla diagonale dell'inferiore - perché sono ciascuno la metà dell'altro nella serie dal maggiore al minore, e ogni inferiore è inscritto[100] nel superiore: il quadrato 16 in quello 8; l'8 nel 4; il 4 nel 2; il 2 nell'1.

[99] "In" nel dattiloscritto.
[100] "Circoscritto" nel dattiloscritto.

Sovrapposti in tal modo (fig. 95), così formano un insieme di forme armoniose e decorative.



La diagonale dell'uno diviene mediana dell'altro e i vertici cadono sui punti mediani di ogni lato del quadrato doppio in valore.

I quadrati stessi, però, si possono disporre anche in altro modo, facendo rilevare che la diagonale dell'uno è sovrapponibile al lato dell'altro.

Figura 95

Continuando a costruire e sovrapporre dei quadrati che[101] sono uno la metà dell'altro, si giunge a un piccolo quadrato, il cui lato tocca quello del più grande da cui si è partiti. Ciò che si vede disposto a chiocciola attorno a un punto centrale sono dei triangoli acuti, metà ciascuno di un retto, e si riproduce lo stesso fatto osservato pei triangoli: qui però il fatto che ognuno di quegli angoli acuti è metà di un retto è dimostrato nella stessa figura (fig. 96).

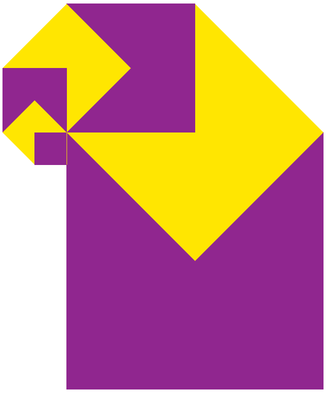


Figura 96

Ciò che si è descritto sulle ricerche e combinazioni, spostamenti, costruzioni, riproduzione di figure che provengono dal dividere in parti lo stesso quadrato, serve a dimostrare come sia possibile lo svolgimento di una ginnastica mentale sulla geometria che conduce a scoprire assiomi e a risolvere problemi, a stabilire dei teoremi. Ciò con l'aiuto di poche nozioni

[101] "Che" manca nel dattoliscritto.

sui lati e sugli angoli - di pochi termini tecnici e di solo alcune disposizioni. Tutto proviene dall'attività data dall'interesse, e dal fatto di aver sotto mano un materiale adatto.
È la lunga osservazione, il lungo maneggio delle figure - che porta a poco a poco - e talvolta esplosivamente - a rilevare dei rapporti che sono in sé importanti, e che sono dimostrabili.
Da teoremi riguardanti il quadrato inscritto, a un caso del teorema di Pitagora, alla costatazione che lo spazio attorno a un punto segna la somma di quattro angoli retti - sono le cose che abbiamo qui riportate.
Ma ognuno può trovare nuovi e più numerosi rapporti.
"Non si può guardare senza fare una scoperta" diceva un bambino a proposito di questo materiale.
A questo proposito, voglio riportare un dialogo raccolto per caso:
"Sapresti dirmi che cosa significa quella figura dove c'è un quadrato che ha il lato metà della diagonale?" (fig. 96)[102]
"Il lato metà della diagonale? ah! tu hai fatto una scoperta!"
"Dimmi che cosa significa"
"Aspetta, tu non sai di aver fatto una scoperta. Nessuno di noi aveva osservato che il lato di quel quadrato è metà della diagonale!
Devo subito scrivere un teorema.
Teorema: un quadrato che ha il lato uguale a metà della diagonale di un altro quadrato è equivalente alla metà di questo".
L'altro rimaneva silenzioso aspettando una risposta alla sua curiosità, del tutto inconsapevole di aver fatto una rivelazione.

Parole da aggiungere al vocabolario[103]

altezza	*mediana*
simile	*diagonale*
bisettrice	*uguale*
equivalente	

[102] Il richiamo alla figura precedente manca nell'edizione a stampa.
[103] Le parole altezza, bisettrice, mediana, diagonale sono già state aggiunte al vocabolario alla fine del capitolo precedente.